Logique du premier ordre
Deuxième partie :
Interprétation d'une formule

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Grenoble Alpes

17 Mars 2011

Plan

Plan

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en logique propositionnelle.

Une assignation

- **En logique propositionnelle** : $V \to \{0, 1\}$
- **En logique du premier ordre** : (I, e) où
  - I est une interprétation des symboles
  - e un état des variables.

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en logique propositionnelle.

Une assignation

- **En logique propositionnelle** : $V \to \{0, 1\}$
- **En logique du premier ordre** : (I, e) où
  - I est une interprétation des symboles
  - e un état des variables.

La valeur d'une formule ne dépend que
de ses variables libres et de ses symboles.

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en logique propositionnelle.

Une assignation

- **En logique propositionnelle** : $V \rightarrow \{0, 1\}$
- **En logique du premier ordre** : (I, e) où
  - I est une interprétation des symboles
  - e un état des variables.

La valeur d'une formule ne dépend que
de ses variables libres et de ses symboles.

L'état des variables est inutile pour évaluer
une formule sans variables libres.

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en logique propositionnelle.

Une assignation

- **En logique propositionnelle** : $V \to \{0,1\}$
- **En logique du premier ordre** : (I, e) où
  - I est une interprétation des symboles
  - e un état des variables.

La valeur d'une formule ne dépend que
de ses variables libres et de ses symboles.

L'état des variables est inutile pour évaluer
une formule sans variables libres.

On utilise une interprétation au lieu d'une assignation.

Instanciation

Définition 4.3.34

Soit x une variable, t un terme et A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.
2. Le terme t est libre pour x dans A si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.

Instantiation : Exemple

Exemple 4.3.35

- Le terme z est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$.

Instantiation : Exemple

Exemple 4.3.35

- Le terme z est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$.
- Par contre le terme y, comme tout terme comportant la variable y, n'est pas libre pour x dans cette formule.

Instantiation : Exemple

Exemple 4.3.35

- Le terme z est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$.
- Par contre le terme y, comme tout terme comportant la variable y, n'est pas libre pour x dans cette formule.
- Par définition, le terme x est libre pour lui-même dans toute formule.

Instantiation : Exemple

Exemple 4.3.35

- Le terme z est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$.
- Par contre le terme y, comme tout terme comportant la variable y, n'est pas libre pour x dans cette formule.
- Par définition, le terme x est libre pour lui-même dans toute formule.
- Soit A la formule $(\forall x P(x) \vee Q(\mathbf{x}))$, la formule $A < x := b >$ vaut $\boxed{(\forall x P(x) \vee Q(b)) \text{ car seule l'occurrence en gras de } x \text{ est libre.}}$

Propriétés

Théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Propriétés

Théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A.
Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Corollaire 4.3.38

Soient A une formule et t un terme libre pour x dans A.
Les formules $\forall xA \Rightarrow A < x := t >$ et $A < x := t > \Rightarrow \exists xA$ sont valides.

La condition sur t est nécessaire :

La condition t terme libre est nécessaire dans **le théorème 4.3.36**.

Exemple 4.3.37

La condition sur t est nécessaire :

La condition t terme libre est nécessaire dans **le théorème 4.3.36**.

Exemple 4.3.37

Soient I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{(0,1)\}$ et e, un état où $y = 0$. Soient A la formule $\exists y\ p(x,y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A

La condition sur *t* est nécessaire :

La condition t terme libre est nécessaire dans **le théorème 4.3.36**.

Exemple 4.3.37

Soient I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{(0,1)\}$ et e, un état où $y = 0$. Soient A la formule $\exists y \; p(x,y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A

- $A < x := t > =$

La condition sur *t* est nécessaire :

La condition t terme libre est nécessaire dans **le théorème 4.3.36**.

Exemple 4.3.37

Soient I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{(0,1)\}$ et e, un état où $y = 0$. Soient A la formule $\exists y\ p(x,y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A

- $A < x := t > =$

$$\boxed{\exists y\ p(y,y)}$$

La condition sur t est nécessaire :

La condition t terme libre est nécessaire dans **le théorème 4.3.36**.

Exemple 4.3.37

Soient I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{(0,1)\}$ et e, un état où $y = 0$. Soient A la formule $\exists y\, p(x,y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A

- $A < x := t > =$ $\boxed{\exists y\, p(y,y)}$

  et $[A < x := t >]_{(I,e)} =$

La condition sur t est nécessaire :

La condition t terme libre est nécessaire dans **le théorème 4.3.36**.

Exemple 4.3.37

Soient I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1)\}$ et e, un état où $y = 0$. Soient A la formule $\exists y\ p(x, y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A

- $A < x := t >=$

  $\boxed{\exists y\ p(y, y)}$

  et $[A < x := t >]_{(I,e)} =$

  $\boxed{[\exists y\ p(y, y)]_{(I,e)} = \max\{[p(0, 0)]_{(I,e)}, [p(1, 1)]_{(I,e)}\} = max\{0, 0\} = 0.}$

La condition sur t est nécessaire :

Exemple 4.3.37

- Soit $d = [\![t]\!]_{(I,e)} = [\![y]\!]_{(I,e)} = 0$. Dans l'assignation $(I, e[x = d])$, nous avons $x = 0$. Donc $[A]_{(I,e[x=d])} =$

La condition sur t est nécessaire :

Exemple 4.3.37

- Soit $d = [\![t]\!]_{(I,e)} = [\![y]\!]_{(I,e)} = 0$. Dans l'assignation $(I, e[x = d])$, nous avons $x = 0$. Donc $[A]_{(I,e[x=d])} =$

$$\boxed{[\exists y\ p(x,y)]_{(I,e[x=d])} = \max\{[p(0,0)]_{(I,e)}, [p(0,1)]_{(I,e)}\} = max\{0,1\} = 1.}$$

La condition sur t est nécessaire :

Exemple 4.3.37

- Soit $d = [\![t]\!]_{(I,e)} = [\![y]\!]_{(I,e)} = 0$. Dans l'assignation $(I, e[x = d])$, nous avons $x = 0$. Donc $[A]_{(I,e[x=d])} =$

$$\boxed{[\exists y\ p(x,y)]_{(I,e[x=d])} = \max\{[p(0,0)]_{(I,e)}, [p(0,1)]_{(I,e)}\} = max\{0,1\} = 1.}$$

Ainsi, $[A < x := t >]_{(I,e)} \neq [A]_{(I,e[x=d])}$, pour $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Plan

Modèle fini

Définition

Un modèle fini d'une formule fermée est une interprétation de la formule de domaine fini, qui rend vraie la formule.

Modèle fini

Définition

Un modèle fini d'une formule fermée est une interprétation de la formule de domaine fini, qui rend vraie la formule.

Remarque

- Le nom des éléments du domaine est sans importance.
- Ainsi pour un modèle avec n éléments, nous utiliserons le domaine des entiers naturels inférieurs à n.

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour ces interprétations.

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour ces interprétations.

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r2}\}$, plus éventuellement l'égalité de sens fixé.

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0,\ldots,n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour ces interprétations.

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r2}\}$, plus éventuellement l'égalité de sens fixé.

Sur un domaine à 5 éléments, Σ a $5 \times 5^5 \times 2^{25}$ interprétations !

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour ces interprétations.

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r2}\}$, plus éventuellement l'égalité de sens fixé.

Sur un domaine à 5 éléments, Σ a $5 \times 5^5 \times 2^{25}$ interprétations !

Cette méthode est inutilisable en pratique.

Logiciel pour construire un modèle fini

MACE

- **traduction** des formules du premier ordre en formules propositionnelles
- **algorithmes performants pour trouver la satisfaisabilité** d'une formule propositionnelle (par exemple des variantes de l'algorithme de `DPLL`)

`http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/mace4.pdf`

Méthode pour la recherche d'un modèle fini

Cas simple : Recherche de modèles à n éléments **par réduction au cas propositionnel** pour une formule n'ayant aucun symbole de fonction et aucune constante, sauf des représentations d'entiers inférieurs à n.

Méthode pour la recherche d'un modèle fini

Cas simple : Recherche de modèles à n éléments **par réduction au cas propositionnel** pour une formule n'ayant aucun symbole de fonction et aucune constante, sauf des représentations d'entiers inférieurs à n.

Construction du modèle à n éléments

1. suppression des quantificateurs par expansion sur un domaine à n éléments,
2. remplacement des égalités par leur valeur
3. recherche d'une assignation propositionnelle qui soit modèle.

Expansion d'une formule

Définition 4.3.39

Soient A une formule et n un entier. La n-expansion de A est la formule qui consiste à remplacer :

- toute sous-formule de A de la forme $\forall x B$ par la conjonction $(\prod_{i<n} B < x := \underline{i} >)$
- toute sous-formule de A de la forme $\exists x B$ par la disjonction $(\sum_{i<n} B < x := \underline{i} >)$

où $\underline{i}$ est la représentation décimale de l'entier i.

Expansion d'une formule

Définition 4.3.39

Soient A une formule et n un entier. La n-expansion de A est la formule qui consiste à remplacer :

- toute sous-formule de A de la forme $\forall xB$ par la conjonction $(\prod_{i<n} B < x := \underline{i} >)$
- toute sous-formule de A de la forme $\exists xB$ par la disjonction $(\sum_{i<n} B < x := \underline{i} >)$

où $\underline{i}$ est la représentation décimale de l'entier i.

Exemple 4.3.40

La 2-expansion de la formule $\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x)$ est la formule

Expansion d'une formule

Définition 4.3.39

Soient A une formule et n un entier. La n-expansion de A est la formule qui consiste à remplacer :

- toute sous-formule de A de la forme $\forall xB$ par la conjonction $(\prod_{i<n} B < x := \underline{i} >)$
- toute sous-formule de A de la forme $\exists xB$ par la disjonction $(\sum_{i<n} B < x := \underline{i} >)$

où $\underline{i}$ est la représentation décimale de l'entier i.

Exemple 4.3.40

La 2-expansion de la formule $\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x)$ est la formule

$$\boxed{P(0) + P(1) \Rightarrow P(0).P(1)}$$

Propriété de la n-expansion

Théorème 4.3.41

Soient n un entier et A une formule ne comportant que des représentations d'entiers de valeur inférieure à n.
Soit B la n-expansion de A.
Toute interprétation de domaine $\{0, \dots, n-1\}$ attribue la même valeur à A et à B.

Propriété de la *n*-expansion

Théorème 4.3.41

Soient n un entier et A une formule ne comportant que des représentations d'entiers de valeur inférieure à n.
Soit B la n-expansion de A.
Toute interprétation de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$ attribue la même valeur à A et à B.

La condition sur A est nécessaire car si A comporte une représentation d'un entier au moins égal à n, la valeur de cette représentation ne sera pas dans le domaine de l'interprétation.

Propriété de la n-expansion

Théorème 4.3.41

Soient n un entier et A une formule ne comportant que des représentations d'entiers de valeur inférieure à n.
Soit B la n-expansion de A.
Toute interprétation de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$ attribue la même valeur à A et à B.

La condition sur A est nécessaire car si A comporte une représentation d'un entier au moins égal à n, la valeur de cette représentation ne sera pas dans le domaine de l'interprétation.
La preuve du théorème est une récurrence sur la taille des formules.

Idée de la récurrence : élimination d'un quantificateur universel

Rappel : théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Idée de la récurrence : élimination d'un quantificateur universel

Rappel : théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Soit $\forall xB$ une sous-formule de A. Soient (I,e) une interprétation et un état de domaine $\{0,\ldots,n-1\}$ donnant à la représentation d'un entier, la valeur de l'entier représenté.

Idée de la récurrence : élimination d'un quantificateur universel

Rappel : théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Soit $\forall xB$ une sous-formule de A. Soient (I,e) une interprétation et un état de domaine $\{0,\ldots,n-1\}$ donnant à la représentation d'un entier, la valeur de l'entier représenté. Par définition :

$$[\forall xB]_{(I,e)} = \prod_{i<n} [B]_{(I,e[x=i])}$$

Idée de la récurrence : élimination d'un quantificateur universel

Rappel : théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Soit $\forall x B$ une sous-formule de A. Soient (I,e) une interprétation et un état de domaine $\{0,\ldots,n-1\}$ donnant à la représentation d'un entier, la valeur de l'entier représenté. Par définition :

$$[\forall x B]_{(I,e)} = \prod_{i<n} [B]_{(I,e[x=i])}$$

D'après le théorème 4.3.36 et le fait que la valeur de la représentation de l'entier i est i, nous avons :

$$[B]_{(I,e[x=i])} = [B < x := \underline{i} >]_{(I,e)}$$

Idée de la récurrence : élimination d'un quantificateur universel

Rappel : théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Soit $\forall x B$ une sous-formule de A. Soient (I,e) une interprétation et un état de domaine $\{0,\ldots,n-1\}$ donnant à la représentation d'un entier, la valeur de l'entier représenté. Par définition :

$$[\forall x B]_{(I,e)} = \prod_{i<n} [B]_{(I,e[x=i])}$$

D'après le théorème 4.3.36 et le fait que la valeur de la représentation de l'entier i est i, nous avons :

$$[B]_{(I,e[x=i])} = [B < x := \underline{i} >]_{(I,e)}$$

Par suite : $[\forall x B]_{(I,e)} = \prod_{i<n}[B < x := \underline{i} >]_{(I,e)} = [\prod_{i<n} B < x := \underline{i} >]_{(I,e)}$.

De l'assignation à l'interprétation

Soient n un entier et A une formule fermée, sans quantificateur, sans égalité, sans symbole de fonction, sans constante sauf des représentations d'entiers inférieurs à n. Soit P l'ensemble des formules atomiques de A (sauf $\top$ et $\bot$ dont le sens est fixé).

Théorème 4.3.42

Soit v une assignation propositionnelle de P dans $\{0, 1\}$ alors il existe une interprétation I de A telle que $[A]_I = [A]_v$.

Preuve.

Cf. poly □

Exemple 4.3.43

Soit v l'assignation définie par $p(0) = 1, p(1) = 0$.

v donne la valeur 0 à la formule $(p(0) + p(1)) \Rightarrow (p(0).p(1))$.

Donc l'interprétation I définie par $p_I = \{0\}$ donne aussi la valeur 0 à cette même formule.

Cet exemple montre que v et I sont deux façons analogues de présenter une interprétation, la deuxième étant souvent plus concise.

De l'interprétation à l'assignation

Soient n un entier et A une formule fermée, sans quantificateur, sans égalité, sans symbole de fonction, sans constante sauf des représentations d'entiers inférieurs à n. Soit P l'ensemble des formules atomiques de A (sauf $\top$ et $\perp$ dont le sens est fixé).

Théorème 4.3.44

Soit I une interprétation de A alors il existe une assignation v de P telle que

$$[A]_I = [A]_v.$$

Preuve.

Cf. poly □

Recherche d'un modèle fini d'une formule fermée **sans** symbole de fonction

Procédure sous les mêmes hypothèses.

1. Remplacer A par sa n-expansion B
2. Dans B,
   - remplacer les égalités par leur valeur, cad $\underline{i} = \underline{j}$ est remplacée par 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$.
   - Simplifier par les identités $x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$.

   Soit C la formule ainsi obtenue.
3. Chercher une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C, qui soit modèle de C :
   - si une telle assignation n'existe pas, A n'a pas de modèle
   - sinon l'interprétation I déduite de v est modèle de A.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 4.3.44, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 4.3.44, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

   De cette contradiction, nous déduisons que A n'a pas de modèle à n éléments.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 4.3.44, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

   De cette contradiction, nous déduisons que A n'a pas de modèle à n éléments.
2. Supposons l'existence d'une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C qui soit modèle de C.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 4.3.44, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

   De cette contradiction, nous déduisons que A n'a pas de modèle à n éléments.
2. Supposons l'existence d'une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C qui soit modèle de C.
   Donc, l'interprétation I construite comme il est indiqué dans le théorème 4.3.42 est modèle de C.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 4.3.44, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

   De cette contradiction, nous déduisons que A n'a pas de modèle à n éléments.
2. Supposons l'existence d'une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C qui soit modèle de C.
   Donc, l'interprétation I construite comme il est indiqué dans le théorème 4.3.42 est modèle de C.
   Donc elle est modèle de B.

Correction de la méthode

1. Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I.
   - D'après le théorème 4.3.41, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 4.3.44, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

   De cette contradiction, nous déduisons que A n'a pas de modèle à n éléments.
2. Supposons l'existence d'une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C qui soit modèle de C.
   Donc, l'interprétation I construite comme il est indiqué dans le théorème 4.3.42 est modèle de C.
   Donc elle est modèle de B.
   Donc d'après le théorème 4.3.41, elle est modèle de A.

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \land \exists x \neg P(x) \land \forall x \forall y (P(x) \land P(y) \Rightarrow x = y))$$

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

2-expansion de A

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

2-expansion de A

$(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 0 = 0).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0 = 1).(P(1).P(0) \Rightarrow 1 = 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1 = 1).$

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

2-expansion de A

$(P(0)+P(1)).(\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 0=0).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0=1).(P(1).P(0) \Rightarrow 1=0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1=1).$

En remplaçant les égalités par leur valeurs

$(P(0)+P(1)).(\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 1).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0).(P(1).P(0) \Rightarrow 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1).$

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

2-expansion de A

$(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 0 = 0).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0 = 1).(P(1).P(0) \Rightarrow 1 = 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1 = 1).$

En remplaçant les égalités par leur valeurs

$(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 1).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0).(P(1).P(0) \Rightarrow 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1).$
Ce qui ce simplifie en :

$$(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)})$$

Exemple 4.3.45

$$A = \exists x P(x) \land \exists x \neg P(x) \land \forall x \forall y (P(x) \land P(y) \Rightarrow x = y))$$

A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

2-expansion de A

$(P(0)+P(1)).(\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 0 = 0).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0 = 1).(P(1).P(0) \Rightarrow 1 = 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1 = 1).$

En remplaçant les égalités par leur valeurs

$(P(0)+P(1)).(\overline{P(0)}+\overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 1).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0).(P(1).P(0) \Rightarrow 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1).$
Ce qui ce simplifie en :

$$(P(0)+P(1)).(\overline{P(0)}+\overline{P(1)})$$

L'assignation $P(0) = 1, P(1) = 0$ est un des modèles propositionnels de la formule ci-dessus, donc l'interprétation I de domaine $\{0, 1\}$ où $P_I = \{0\}$ est modèle de A.

Recherche d'un modèle fini d'une formule fermée **avec** symbole de fonction

Soit A une formule fermée pouvant comporter des représentations d'entiers de valeur inférieure à n.

Procédure

- Remplacer A par son expansion.
- Supprimer les égalités.
- Enumérer les choix des valeurs des symboles, en propageant le plus possible chacun des choix effectués.

Similaire à *l'algorithme de* `DPLL`.

Exemple 4.3.46 : $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Chercher un contre-modèle à 2 éléments

Exemple 4.3.46 : $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Chercher un contre-modèle à 2 éléments

2-expansion de A

Exemple 4.3.46 : $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Chercher un contre-modèle à 2 éléments

2-expansion de A

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(a)$$

Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a. On choisit (arbitrairement) $a = 0$.

Exemple 4.3.46 : $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Chercher un contre-modèle à 2 éléments

2-expansion de A

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(a)$$

Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a. On choisit (arbitrairement) $a = 0$.

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(0)$$

Exemple 4.3.46 : $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Chercher un contre-modèle à 2 éléments

2-expansion de A

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(a)$$

Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a. On choisit (arbitrairement) $a = 0$.

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(0)$$

$P(0) = 0, P(1) = 1$ est un contre-modèle propositionnel,
cad une interprétation telle que $P = \{1\}$.

Exemple 4.3.46 : $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Chercher un contre-modèle à 2 éléments

2-expansion de A

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(a)$$

Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a. On choisit (arbitrairement) $a = 0$.

$$P(0) + P(1) \Rightarrow P(0)$$

$P(0) = 0, P(1) = 1$ est un contre-modèle propositionnel,
cad une interprétation telle que $P = \{1\}$.

Un contre-modèle est l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ telle que $P = \{1\}$ et $a = 0$.

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$,
   $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$,
   $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$,
   $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$
   - De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, on déduit : $P(f(0)) = 1$

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$,
   $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$
   - De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, on déduit : $P(f(0)) = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$ et de $P(f(0)) = 1$, on déduit $f(0) \neq f(b)$ donc que $b \neq 0$, donc : $b = 1$

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$,
   $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$
   - De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, on déduit : $P(f(0)) = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$ et de $P(f(0)) = 1$, on déduit $f(0) \neq f(b)$ donc que $b \neq 0$, donc : $b = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$, $P(0) = 1$ et $b = 1$, on déduit $f(b) = f(1) \neq 0$ donc : $f(1) = 1$ et $P(1) = 0$

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$,
   $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$
   - De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, on déduit : $P(f(0)) = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$ et de $P(f(0)) = 1$, on déduit $f(0) \neq f(b)$ donc que $b \neq 0$, donc : $b = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$, $P(0) = 1$ et $b = 1$, on déduit $f(b) = f(1) \neq 0$ donc : $f(1) = 1$ et $P(1) = 0$
   - De $P(f(0)) = 1$ et $P(1) = 0$, on déduit : $f(0) = 0$

Exemple 4.3.47 : $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion :
   $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$.
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F.
   $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$, $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$
   - De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, on déduit : $P(f(0)) = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$ et de $P(f(0)) = 1$, on déduit $f(0) \neq f(b)$ donc que $b \neq 0$, donc : $b = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$, $P(0) = 1$ et $b = 1$, on déduit $f(b) = f(1) \neq 0$ donc : $f(1) = 1$ et $P(1) = 0$
   - De $P(f(0)) = 1$ et $P(1) = 0$, on déduit : $f(0) = 0$

Modèle de domaine $\{0, 1\}$: $a = 0, b = 1, P = \{0\}, f(0) = 0, f(1) = 1$

Plan

Substitution

L'application d'une substitution à une formule propositionnelle valide donne une formule valide, s'étend à la logique du premier ordre.

Substitution

L'application d'une substitution à une formule propositionnelle valide donne une formule valide, s'étend à la logique du premier ordre.

Exemple :

Soit $\sigma(p) = \forall x\ q(x)$.
$p \vee \neg p$ est valide, il en est de même de la formule

$$\sigma(p \vee \neg p) = \forall x\ q(x) \vee \neg \forall x\ q(x)$$

Remplacement

Le principe de remplacement s'étend avec le même énoncé de la logique propositionnelle à la logique du premier ordre car il est déduit des propriétés élémentaires suivantes :

Pour toutes formules A et B et toute variable x :

- $(A \Leftrightarrow B) \models (\forall x A \Leftrightarrow \forall x B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \models (\exists x A \Leftrightarrow \exists x B)$

Plan

Relation entre $\forall$ et $\exists$

Lemme 4.4.1

Soient A une formule et x une variable.

1. $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$
2. $\forall xA \equiv \neg\exists x\neg A$
3. $\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$
4. $\exists xA \equiv \neg\forall x\neg A$

Prouvons les deux premières identités, les deux autres sont données en exercice 78

Preuve de $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état

Evaluons $[\neg\forall x A]_{(I,e)}$

Preuve de $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état
Evaluons $[\neg\forall xA]_{(I,e)}$
$= 1 - [\forall xA]_{(I,e)}$

Preuve de $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état
Evaluons $[\neg\forall x A]_{(I,e)}$
$= 1 - [\forall x A]_{(I,e)}$
$= 1 - \prod_{d \in D}[A]_{(I,e[x=d])}$ d'après le sens de $\forall$

Preuve de $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état

Evaluons $[\neg\forall x A]_{(I,e)}$

$= 1 - [\forall x A]_{(I,e)}$

$= 1 - \prod_{d \in D} [A]_{(I,e[x=d])}$ d'après le sens de $\forall$

$= \sum_{d \in D} \left(1 - [A]_{(I,e[x=d])}\right)$ par les lois de de Morgan généralisées

Preuve de $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état

Evaluons $[\neg\forall xA]_{(I,e)}$

$= 1 - [\forall xA]_{(I,e)}$

$= 1 - \prod_{d\in D}[A]_{(I,e[x=d])}$ d'après le sens de $\forall$

$= \sum_{d\in D}\left(1 - [A]_{(I,e[x=d])}\right)$ par les lois de de Morgan généralisées

$= \sum_{d\in D}[\neg A]_{(I,e[x=d])}$ par définition du sens de $\neg$

Preuve de $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état

Evaluons $[\neg\forall x A]_{(I,e)}$

$= 1 - [\forall x A]_{(I,e)}$	
$= 1 - \prod_{d\in D}[A]_{(I,e[x=d])}$	d'après le sens de $\forall$
$= \sum_{d\in D}\left(1 - [A]_{(I,e[x=d])}\right)$	par les lois de de Morgan généralisées
$= \sum_{d\in D}[\neg A]_{(I,e[x=d])}$	par définition du sens de $\neg$
$= [\exists x \neg A]_{(I,e)}$	par définition du sens de $\exists$

Preuve de $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$

Preuve de $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$

Evaluons $\forall x A$

Preuve de $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$

Evaluons $\forall x A$

$\equiv \neg\neg\forall x A$ identité de la double négation

Preuve de $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$

Evaluons $\forall x A$	
$\equiv \neg\neg\forall x A$	identité de la double négation
$\equiv \neg\exists x \neg A$	par l'identité 1

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
3. $\forall x(A \wedge B) \equiv (\forall x A \wedge \forall x B)$

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
3. $\forall x (A \wedge B) \equiv (\forall x A \wedge \forall x B)$
4. $\exists x (A \vee B) \equiv (\exists x A \vee \exists x B)$

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
3. $\forall x (A \wedge B) \equiv (\forall x A \wedge \forall x B)$
4. $\exists x (A \vee B) \equiv (\exists x A \vee \exists x B)$
5. Soit Q un des quantificateurs $\forall, \exists$, soit $\circ$ une des opérations $\wedge, \vee, \Rightarrow$. Supposons que x n'est pas une variable libre de A.
   5.1 $QxA \equiv A$,
   5.2 $Qx(A \circ B) \equiv (A \circ QxB)$

Exemple 4.4.2

Nous éliminons de ces deux formules les quantificateurs inutiles :

- $\forall x \exists x P(x) \equiv$

  $\boxed{\exists x P(x)}$

- $\forall x (\exists x P(x) \vee Q(x)) \equiv$

  $\boxed{\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)}$

Changement de variables liées (1/4)

Théorème 4.4.3

Soit Q un des quantificateurs $\forall, \exists$. Supposons que y soit une variable qui ne figure pas dans QxA alors : $QxA \equiv QyA < x := y >$.

Changement de variables liées (1/4)

Théorème 4.4.3

Soit Q un des quantificateurs $\forall, \exists$. Supposons que y soit une variable qui ne figure pas dans QxA alors : $QxA \equiv QyA < x := y >$.

Exemple 4.4.4

- $\forall x\, p(x,z) \equiv \forall y\, p(y,z)$.
- $\forall x\, p(x,z) \not\equiv \forall z\, p(z,z)$.

Changement de variables liées (2/4)

Définition 4.4.5

Deux formules sont égales à un changement près de variables liées si nous pouvons obtenir l'une à partir de l'autre par des remplacements de sous-formules de la forme QxA par

$$QyA < x := y >$$

où Q est un quantificateur et y est une variable qui ne figure pas dans QxA.

Les deux formules sont α-équivalentes ou copie l'une de l'autre ou encore, notée $A =_\alpha B$

Changement de variables liées (3/4)

Théorème 4.4.6

Si deux formules sont égales à un changement près de variables liées alors elles sont équivalentes.

Changement de variables liées (4/4)

Exemple 4.4.7

Montrons que les formules $\forall x \exists y P(x, y)$ et $\forall y \exists x P(y, x)$ sont égales par changement des variables liées et donc équivalentes.

Changement de variables liées (4/4)

Exemple 4.4.7

Montrons que les formules $\forall x \exists y P(x, y)$ et $\forall y \exists x P(y, x)$ sont égales par changement des variables liées et donc équivalentes.

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

Changement de variables liées (4/4)

Exemple 4.4.7

Montrons que les formules $\forall x \exists y P(x, y)$ et $\forall y \exists x P(y, x)$ sont égales par changement des variables liées et donc équivalentes.

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

$$\equiv \forall u \exists y P(u, y)$$

Changement de variables liées (4/4)

Exemple 4.4.7

Montrons que les formules $\forall x \exists y P(x,y)$ et $\forall y \exists x P(y,x)$ sont égales par changement des variables liées et donc équivalentes.

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

$$\equiv \forall u \exists y P(u,y)$$

$$\equiv \forall u \exists x P(u,x)$$

Changement de variables liées (4/4)

Exemple 4.4.7

Montrons que les formules $\forall x \exists y P(x,y)$ et $\forall y \exists x P(y,x)$ sont égales par changement des variables liées et donc équivalentes.

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

$$\equiv \forall u \exists y P(u,y)$$

$$\equiv \forall u \exists x P(u,x)$$

$$\equiv \forall y \exists x P(y,x)$$

Savoir si deux formules sont α-équivalentes

Technique

- Tracer des traits entre chaque quantificateur et les variables qu'il lie.
- Effacer les noms des variables liées.

Si après cette transformation, les deux formules deviennent identiques, c'est qu'elles sont égales à un changement près des variables liées.

Exemple 4.4.8

Soit $\forall x \exists y P(y,x)$ et $\forall y \exists x P(x,y)$ deux formules.

$$\forall | \exists | P(|,|)$$

Exercice

Calculer la transformation pour

- $A = \forall x \forall y\ R(x, y, y)$
- $B = \forall x \forall y\ R(x, x, y)$

A et *B* sont-elles α-équivalentes ?

Exercice

Calculer la transformation pour

- $A = \forall x \forall y\ R(x, y, y)$
- $B = \forall x \forall y\ R(x, x, y)$

A et B sont-elles α-équivalentes ? non

Propriété $=_\alpha$

Théorème 4.4.9

1. Soit A une formule atomique, $A =_\alpha A'$ si et seulement si $A' = A$
2. $\neg B =_\alpha A'$ si et seulement si $A' = \neg B'$ et $B =_\alpha B'$
3. $(B \circ C) =_\alpha A'$ si et seulement si $A' = (B' \circ C')$ et $B =_\alpha B'$ et $C =_\alpha C'$.
   où $\circ$ est l'un des connecteurs $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
4. Si $\forall xB =_\alpha A'$ alors $A' = \forall x' B'$ et pour toute variable z absente des formules B et B', nous avons :
   $B < x := z > =_\alpha B' < x' := z >$.
5. Si $\exists xB =_\alpha A'$ alors $A' = \exists x' B'$ et pour toute variable z absente des formules B et B', nous avons :
   $B < x := z > =_\alpha B' < x' := z >$.
6. S'il existe une variable z absente des formules B et B' telle que
   $B < x := z > =_\alpha B' < x' := z >$ alors $\forall xB =_\alpha \forall x' B'$ et $\exists xB =_\alpha \exists x' B'$.

Algorithme pour le test de l'alpha-équivalence

Les données du test sont deux formules A et A'.
Le résultat est oui si $A =_\alpha A'$, non si $A \neq_\alpha A'$.

Exemple 4.4.10

On traite uniquement le cas où $A = \forall x B$.

1. Si A' n'est pas de la forme $\forall x' B'$, alors, d'après le point (4) du théorème, la réponse est non.
2. Si $A' = \forall x' B'$ alors nous choisissons une variable z quelconque absente de B et B'.
    2.1 Si $B < x := z > =_\alpha B' < x' := z >$ alors, d'après point (6) du théorème, la réponse est oui.
    2.2 Si $B < x := z > \neq_\alpha B' < x' := z >$ alors, d'après le point (4) du théorème la réponse est non.

Plan

Plan du Semestre

AUJOURD'HUI

- Logique propositionnelle
- Résolution propositionnelle
- Déduction naturelle propositionnelle

PARTIEL

- Logique du premier ordre *
- Base de la démonstration automatique (« résolution au premier ordre »)
- Déduction naturelle au premier ordre

EXAMEN

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?