Déduction Naturelle Premier Ordre : Cohérence

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Grenoble Alpes

Avril 2010

Plan

Plan

Cohérence et Complétude

Cohérence et Complétude

- **Nous allons montrer la cohérence des règles de notre système.**

Cohérence et Complétude

- **Nous allons montrer la cohérence des règles de notre système.**
- **Nous admettrons sans preuve que ce système est complet.** On trouvera des preuves de complétude pour des systèmes de règles proches dans les livres suivants :
  - Peter B. Andrews. *An introduction to mathematical logic : to truth through proof*. Academic Press, 1986.
  - Herbert B. Enderton. *A mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 2001.

Plan

Rappel : Règles « propositionnelles »

Table 3.1

Introduction		Élimination	
$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \dots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow I$	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$	$\Rightarrow E$
$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$	$\wedge I$	$\dfrac{A \wedge B}{A}$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$	$\wedge E1$ $\wedge E2$
$\dfrac{A}{A \vee B}$ $\dfrac{A}{B \vee A}$	$\vee I1$ $\vee I2$	$\dfrac{A \vee B \quad A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow C}{C}$	$\vee E$
Règle du faux			
$\dfrac{\perp}{A}$ Efq			
Règle à l'absurde			
$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ RAA			

$[A]$ signifie que A est une hypothèse

Récapitulatif des règles des quantificateurs : Tableau 6.1

$\dfrac{A}{\forall x A}$	$\forall I$	x ne doit être libre ▶ ni dans l'environnement de la preuve, ▶ ni dans le contexte de la prémisse de la règle
$\dfrac{\forall x A}{A{<}x{:=}t{>}}$	$\forall E$	t est libre pour x dans A
$\dfrac{A{<}x{:=}t{>}}{\exists x A}$	$\exists I$	t est libre pour x dans A
$\dfrac{\exists x A \qquad (A \Rightarrow B)}{B}$	$\exists E$	x ne doit être libre ▶ ni dans l'environnement ▶ ni dans B, ▶ ni dans le contexte de la prémisse droite de la règle.

A et B sont des formules, x est une variable, t est un terme

Règle de la copie

La règle de copie consiste à déduire d'une formule, une autre formule égale au changement près des variables liées.

$$\frac{A'}{A} \text{ copie}$$

Rappel : Deux formules sont égales à un changement près de variables liées si on peut obtenir l'une à partir de l'autre par des remplacements de sous-formules, de la forme QxA par $QyA < x := y >$ où Q est un quantificateur et y est une variable qui ne figure pas dans QxA.

Réflexivité et Congruence

Deux règles caractérisent l'égalité :

- un terme est égal à lui-même
- si deux termes sont égaux, on peut les remplacer l'un par l'autre.

Réflexivité et Congruence

Deux règles caractérisent l'égalité :

- un terme est égal à lui-même
- si deux termes sont égaux, on peut les remplacer l'un par l'autre.

$\dfrac{}{t=t}$	réflexivité	t est un terme
$\dfrac{s=t \qquad A<x:=s>}{A<x:=t>}$	congruence	s et t sont deux termes libres pour la variable x dans la formule A

Plan

Exemple 6.1.6 $\neg \forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de De Morgan)

Exemple 6.1.6 $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$

Exemple 6.1.6 $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x \neg A$
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x \neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x \neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	RAA 6

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	RAA 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x \neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x \neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	RAA 6
1, 2	8	$\forall x A$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	RAA 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	*RAA* 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9
1	11	$\exists x\neg A$	*RAA* 10

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	*RAA* 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9
1	11	$\exists x\neg A$	*RAA* 10
	12	Donc $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 1, 11

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Plan

Rappel

Nous allons utiliser deux résultats vu dans la première partie du cours sur la logique du premier ordre :

Théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Corollaire 4.3.38

Soient A une formule et t un terme libre pour x dans A.
Les formules $\forall xA \Rightarrow A < x := t >$ et $A < x := t > \Rightarrow \exists xA$ sont valides.

Propriétés de la conséquence

Propriété 6.3.1

Soient Γ un ensemble de formules, x une variable et A une formule. Supposons que x ne soit pas libre dans Γ, alors nous avons :

$$\Gamma \models A \text{ si et seulement si } \Gamma \models \forall x A.$$

Preuve de la propriété 6.3.1

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A$.

Soit (I, e) une assignation modèle de Γ.

Puisque x n'est pas libre dans Γ, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, (I, f) et (I, e) donnent la même valeur aux formules de Γ, donc (I, f) est modèle de Γ.

Puisque $\Gamma \models A$, (I, f) est modèle de A, donc (I, e) est modèle de $\forall x A$.

Preuve de la propriété 6.3.1

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A$.

Soit (I, e) une assignation modèle de Γ.

Puisque x n'est pas libre dans Γ, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, (I, f) et (I, e) donnent la même valeur aux formules de Γ, donc (I, f) est modèle de Γ.

Puisque $\Gamma \models A$, (I, f) est modèle de A, donc (I, e) est modèle de $\forall x A$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\Gamma \models \forall x A$.
Puisque la formule $\forall x A \Rightarrow A$ est valide (d'après le corollaire 4.3.38 avec $t = x$), on a $\Gamma \models A$.

Propriétés de la conséquence

Propriété 6.3.2

Soient Γ un ensemble de formules, x une variable, A et B deux formules.

Supposons que x ne soit libre ni dans Γ, ni dans B, alors nous avons :

$$\Gamma \models A \Rightarrow B \text{ si et seulement si } \Gamma \models (\exists x A) \Rightarrow B$$

Preuve de la propriété 6.3.2

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$. On montre en fait que $\Gamma, \exists x A \models B$.
Soit (I, e) une assignation modèle de Γ.

Preuve de la propriété 6.3.2

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$. On montre en fait que $\Gamma, \exists x A \models B$.
Soit (I, e) une assignation modèle de Γ.

De même (I, e) et $(I, e[x = d])$ donnent la même valeur aux formules de Γ (car x non libre dans Γ).

D'où $(I, e[x = d])$ est modèle de $A \Rightarrow B$ (pour tout $d \in D$).

Preuve de la propriété 6.3.2

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$. On montre en fait que $\Gamma, \exists x A \models B$.
Soit (I, e) une assignation modèle de Γ.

De même (I, e) et $(I, e[x = d])$ donnent la même valeur aux formules de Γ (car x non libre dans Γ).

D'où $(I, e[x = d])$ est modèle de $A \Rightarrow B$ (pour tout $d \in D$).

Supposons maintenant que (I, e) est aussi modèle de $\exists x A$.
Ceci signifie que (I, g) est modèle de A pour un état
$g = e[x = d]$.

Preuve de la propriété 6.3.2

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$. On montre en fait que $\Gamma, \exists x A \models B$. Soit (I, e) une assignation modèle de Γ.

De même (I, e) et $(I, e[x = d])$ donnent la même valeur aux formules de Γ (car x non libre dans Γ).

D'où $(I, e[x = d])$ est modèle de $A \Rightarrow B$ (pour tout $d \in D$).

Supposons maintenant que (I, e) est aussi modèle de $\exists x A$. Ceci signifie que (I, g) est modèle de A pour un état $g = e[x = d]$.

Nous avons vu que (I, g) est aussi modèle de $A \Rightarrow B$, par conséquent (I, g) est modèle de B.

Puisque x non libre dans B, (I, g) et (I, e) donnent la même valeur à B. Ainsi, (I, e) est modèle de B.

Preuve de la propriété 6.3.2

$\Leftarrow$ Supposons que $\Gamma \models (\exists x A) \Rightarrow B$, autrement dit $\Gamma, \exists x A \models B$.
Puisque la formule $A \Rightarrow (\exists x A)$ est valide (corollaire avec $t = x$), nous avons $\Gamma, A \models \Gamma, \exists x A \models B$ et donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Plan

Cohérence de la déduction

Théorème 6.3.3

Si $\Gamma \vdash A$ (par une preuve en déduction naturelle) alors $\Gamma \models A$.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Preuve par récurrence :

- Soit Γ un ensemble de formules.
- Soit P une preuve de A dans cet environnement.
- Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la $i^{\text{ème}}$ ligne de P. Nous posons $H_0 = \emptyset$.
- Soit Γ, H_i l'ensemble des formules de Γ et de la liste H_i.

Montrons que pour tout k nous avons $\Gamma, H_k \models C_k$.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Preuve par récurrence :

- Soit Γ un ensemble de formules.
- Soit P une preuve de A dans cet environnement.
- Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la $i^{\text{ème}}$ ligne de P. Nous posons $H_0 = \emptyset$.
- Soit Γ, H_i l'ensemble des formules de Γ et de la liste H_i.

Montrons que pour tout k nous avons $\Gamma, H_k \models C_k$.
Pour la dernière ligne n de la preuve : H_n est vide et $C_n = A$

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Preuve par récurrence :

- Soit Γ un ensemble de formules.
- Soit P une preuve de A dans cet environnement.
- Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la $i^{\text{ème}}$ ligne de P. Nous posons $H_0 = \emptyset$.
- Soit Γ, H_i l'ensemble des formules de Γ et de la liste H_i.

Montrons que pour tout k nous avons $\Gamma, H_k \models C_k$.
Pour la dernière ligne n de la preuve : H_n est vide et $C_n = A$
D'où, $\Gamma \models A$.

Cas de base

Supposons que A est déduite de Γ par la preuve vide.

Alors A est élément de Γ.

Donc $\Gamma \models A$. Puisque $H_0 = \emptyset$, nous pouvons conclure : $\Gamma, H_0 \models A$

Hypothèse de récurrence

Supposons que pour tout i où $i < k$, $\Gamma, H_i \models C_i$.

Montrons que $\Gamma, H_k \models C_k$.

Hypothèse de récurrence

Supposons que pour tout i où $i < k$, $\Gamma, H_i \models C_i$.

Montrons que $\Gamma, H_k \models C_k$.

On examine uniquement le cas des nouvelles règles et pour simplifier on ne fait pas de distinctions entre deux formules égales aux abréviations près de la négation et de l'équivalence.

La règle $\forall$I

Supposons que $C_k = \forall x A$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\forall$I, de la formule A avec $A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $A \in \Gamma$.

Si $A = C_i$ et $0 < i < k$, **par hypothèse de récurrence** on a, $\Gamma, H_i \models A$.
Si $A \in \Gamma$ alors $\Gamma \models A$.
Puisque H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models A$.

D'après les conditions d'application de la règle, x n'est pas libre dans Γ, H_i.
Donc, **d'après la propriété 6.3.1**, on a aussi $\Gamma, H_i \models \forall x A$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k-1$ et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

La règle $\forall$E

Supposons que $C_k = A < x := t >$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\forall$E, de la formule $\forall x A$ avec $\forall x A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $\forall x A \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce que H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models \forall x A$

D'après les conditions d'applications de la règle, le terme t est libre pour la variable x dans la formule A.
Donc, **d'après le corollaire 4.3.38**, la formule $\forall x A \Rightarrow A < x := t >$ est valide et par suite $\Gamma, H_i \models A < x := t >$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k-1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

La règle $\exists$I

Supposons que $C_k = \exists x A$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\exists$I, de la formule $A < x := t >$ avec $A < x := t >= C_i$ et $0 < i < k$ ou $A < x := t > \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models A < x := t >$

D'après les conditions d'applications de la règle, le terme t est libre pour la variable x dans la formule A.
Donc, **d'après le corollaire 4.3.38**, la formule $A < x := t > \Rightarrow \exists x A$ est valide et par suite $\Gamma, H_i \models \exists x A$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k-1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

La règle $\exists$E

Supposons que $C_k = B$ et que cette formule a été déduite, par la règle $\exists$E, de la formule $\exists x A$ avec $\exists x A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $\exists x A \in \Gamma$ et de la formule $A \Rightarrow B$ avec $A \Rightarrow B = C_j$ et $0 < j < k$ ou $A \Rightarrow B \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i et j tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$, $\Gamma, H_i \models \exists x A$ et $\Gamma, H_j \models A \Rightarrow B$.

D'après les conditions d'application de la règle, x n'est libre ni dans Γ, H_j, ni dans B
Donc, **d'après la propriété 6.3.2**, on a aussi $\Gamma, H_j \models (\exists x A) \Rightarrow B$.

Puisque les lignes i et j sont utilisables sur la ligne $k-1$, et que H_0 est la liste vide, H_i et H_j sont préfixes de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifie par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models \exists x A$ et $\Gamma, H_k \models (\exists x A) \Rightarrow B$.
Par suite $\Gamma, H_k \models B$, c'est-à-dire, $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

Règle de copie

Supposons que $C_k = A'$ et que cette formule a été déduite, par la règle de copie de la formule A avec $A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $A \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i tel que $0 \leq i < k$, $\Gamma, H_i \models A$.

D'après le théorème 4.4.6, les formules A et A' sont équivalentes (car $A =_\alpha A'$), nous avons donc $\Gamma, H_i \models A'$. Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k-1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.

Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, nous avons $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models A'$, c'est-à-dire, $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

Réflexivité

Supposons que $C_k = (t = t)$.

On rappelle que l'égalité s'interprète toujours comme $\{(d, d) \mid d \in D\}$ donc en particulier $=_I$ contient toujours $([\![t]\!]_I, [\![t]\!]_I)$ (pour tout I).

La formule C_k est donc valide, d'où $\Gamma, H_k \models C_k$. $\Box$

Congruence (1/2)

Supposons que $C_k = A < x := t >$ et que cette ligne a été déduite, par la règle de congruence, de la formule $s = t$ avec $(s = t) = C_i$ et $0 < i < k$ ou $(s = t) \in \Gamma$ et de la formule $A < x := s >$ avec $A < x := s >= C_j$ et $0 < j < k$ ou $A < x := s >\in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce que H_0 est la liste vide, il existe i et j tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$, $\Gamma, H_i \models (s = t)$ et $\Gamma, H_j \models A < x := s >$.

Puisque les lignes i et j sont utilisables sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i et H_j sont préfixes de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifie par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models (s = t)$ et $\Gamma, H_k \models A < x := s >$.

Congruence (2/2)

D'après le théorème 4.3.36 et les conditions d'application de la règle, on a :

- $[A < x := s >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$ où $d = [\![s]\!]_{(I,e)}$
- $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d'])}$ où $d' = [\![t]\!]_{(I,e)}$

Congruence (2/2)

D'après le théorème 4.3.36 et les conditions d'application de la règle, on a :

- $[A < x := s >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$ où $d = [\![s]\!]_{(I,e)}$
- $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d'])}$ où $d' = [\![t]\!]_{(I,e)}$

De plus, l'égalité assure que si (I, e) est modèle de $s = t$ alors d et d' sont le **même** élément de D, et ainsi$[A < x := s >]_{(I,e)} = A < x := t >]_{(I,e)}$.

Congruence (2/2)

D'après le théorème 4.3.36 et les conditions d'application de la règle, on a :

- $[A < x := s >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$ où $d = [\![s]\!]_{(I,e)}$
- $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d'])}$ où $d' = [\![t]\!]_{(I,e)}$

De plus, l'égalité assure que si (I, e) est modèle de $s = t$ alors d et d' sont le **même** élément de D, et ainsi$[A < x := s >]_{(I,e)} = A < x := t >]_{(I,e)}$.

D'où, $s = t, A < x := s > \models A < x := t >$
Par suite $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

Plan

Aujourd'hui

- DN premier ordre

Plan du Semestre

AUJOURD'HUI

- Logique propositionnelle
- Résolution propositionnelle
- Déduction naturelle propositionnelle

PARTIEL

- Logique du premier ordre
- Base de la démonstration automatique ("résolution au premier ordre")
- Déduction naturelle au premier ordre *

EXAMEN

Conclusion

Merci de votre attention.

Questions ?