Examen INF402/432 : seconde session 2017

Benjamin Wack

juin 2017
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
IMPORTANT :

— Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation. Nous nous autoriserons à enlever des points le cas échéant.

— De manière générale toute réponse non justifiée sera créditée de zéro point (par exemple indiquer les régles utilisées dans l'algorithme d'unification, dans la déduction naturelle ...).

Exercice 1 (Comparer plusieurs méthodes (20 points))
L'ensemble de clauses ci-dessous :
$a + b + \bar{d},\ d + c,\ \bar{a} + b,\ \bar{a} + \bar{c},\ \bar{b} + c,\ \bar{c} + a$
est insatisfaisable. On demande de le vérifier par trois méthodes :

1. *Écrire une preuve de $\perp$ par résolution propositionnelle.*
2. *Appliquer l'algorithme DPLL et donner la trace de l'algorithme.*
3. *On assimile l'ensemble de clauses à un produit de clauses et on transforme ce produit de clauses en une somme de monômes, qui doit donner 0 une fois simplifiée. On donnera les principales étapes de cette transformation.*

□

Exercice 2 (Expansions (10 points))
Soit la formule $\forall x(\neg F(x) \vee \neg G(x)) \Rightarrow (\neg\exists x F(x) \vee \neg\exists x G(x))$.
Trouvez un contre-modèle de la formule par la méthode des expansions et expliquez comment vous l'avez trouvé. Le contre-modèle devra être présenté comme une interprétation du premier ordre en indiquant son domaine et le sens de F et G. □

Exercice 3 (Skolémisation et résolution (20 points))
Soit $A1$ la formule $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x))$.
Soit $A2$ la formule $\exists x(P(x) \wedge S(x))$.
Soit B la formule $\exists x(S(x) \wedge R(x))$.

On souhaite démontrer que B est une conséquence de $A1$ et de $A2$ par Skolémisation, instanciation et résolution.

1. *Expliquer clairement la démarche à suivre, ses étapes, les formules sur lesquelles il faudra travailler.*
2. *Mettre en forme clausale un ensemble judicieux Γ de formules.*
3. *Trouver des instances contradictoires des clauses obtenues et montrer par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
4. *Donner une preuve directe du caractère contradictoire de Γ par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

□

Exercice 4 (Déduction naturelle (25 points))
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les formules et on indiquera pour chaque ligne le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\neg a \wedge (a \vee b) \Rightarrow b$
2. $\neg \exists x Q(x) \Rightarrow \forall x \neg Q(x)$
3. $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$
4. $\forall x \forall y(\neg(x = y) \Rightarrow \neg(y = x))$

□

Exercice 5 (Unification (25 points))

1. *L'unificateur* $x := f(k(a)), y := k(a), z := k(a)$ *est-il la solution la plus générale de l'équation* $g(h(x), y) = g(h(f(y), z)$ *?*
   Si vous répondez non, indiquez deux *unificateurs plus généraux.*

   Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes en donnant à chaque fois le nom des règles utilisées.
2. $P(x, f(y, a)) = P(y, f(b, x))$
3. $P(a, f(b, x)) = P(x, y)$
4. $P(x, f(g(z), x), y) = P(h(z), y, f(g(j(a)), x))$

□

Exercice 6 (Formalisation (20 points))
On souhaite décrire des relations de généalogie en logique du premier ordre. Pour cela, on dispose des relations :
— $parent(x, y)$ *qui est vrai si* x *est le père ou la mère de* y,
— $homme(x)$ *qui est vrai si* x *est un homme, et enfin,*
— $femme(x)$ *qui est vrai si* x *est une femme.*

À l'aide des relations précédentes uniquement*, traduisez les énoncés suivants :*

1. x *est une fille de* y *;*
2. x *est un cousin (ou une cousine) de* y *;*
3. x *est le demi-frère de* y *(autrement dit ils n'ont qu'un seul parent en commun) ;*
4. x *est le grand-père maternel de* y *;*
5. *Soit la formule :* $\exists y\ parent(x, y) \wedge \forall y\ (parent(x, y) \Rightarrow \neg \exists z\ parent(y, z)))$. *Que signifie-t-elle en français ?*
6. *À l'aide d'équivalences remarquables, démontrer que cette dernière formule est équivalente à :*
   $\exists y \forall u \forall z(parent(x, y) \wedge \neg(parent(x, u) \wedge parent(u, z)))$.

□