Examen INF242 session 2

Benjamin Wack

juin 2015
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation, exercice du poly (20 points))

Considérons la signature $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f0}, J^{r2}, G^{r2}\}$, où les symboles ont le sens donné ci-dessous.

- a : *l'équipe d'Allemagne.*
- f : *l'équipe de France.*
- $J(x, y)$: *x a joué un match contre y.*
- $G(x, y)$: *x a gagné contre y.*

Exprimer en logique du premier ordre en utilisant la signature Σ les assertions suivantes :

1. *L'équipe de France a gagné un match et en a perdu un.*
2. *L'équipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul.*
3. *Une équipe a gagné tous ses matchs.*
4. *Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs.*
5. *Considérons l'assertion suivante : « Tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs, ont gagné au moins un match ». Parmi les formules suivantes, lesquelles expriment la phrase ci-dessus, et lesquelles sont équivalentes ?*
   (a) $\forall x \exists y\, (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (b) $\forall x (\exists y\, (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (c) $\exists x (\forall y\, (J(x, y) \Rightarrow G(x, y)) \Rightarrow \forall z (J(x, z) \Rightarrow \exists v G(x, v)))$.
   (d) $\forall x \forall y\, (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (e) $\forall x (\forall y\, (J(x, y) \wedge \forall z (J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.

□

Exercice 2 (Démonstration par récurrence (20 points))

Définition : Une formule F est sous forme prénexe *si elle est de la forme $Q_1 x_1 \ \ldots Q_n x_n\ G$ où G est une formule sans quantificateur et chacun des Q_i est un quantificateur (soit $\forall$ soit $\exists$).*

On appelle $Q_1 x_1 \ \ldots Q_n x_n$ le préfixe de F. Le préfixe peut être vide.

1. *Montrez que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\neg$, $\vee$, et le quantificateur $\exists$.*
2. *Montrez que toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe.*
   (Rappel : $(\forall x A) \vee B \equiv \forall x (A \vee B)$ si x n'est pas libre dans B).

□

Exercice 3 (Déduction naturelle (20 points))
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre :

1. $\forall x(\neg P(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
2. $\forall x(x = a \vee x = b) \Rightarrow b = a \Rightarrow \forall x(x = b)$

□

Exercice 4 (Skolémisation et résolution (20 points))
Considérons les formules suivantes :

1. $\forall x \forall y(\neg P(y, x) \Rightarrow \neg Q(x))$
2. $\exists x Q(x)$
3. $\forall x \forall y \neg(P(x, y) \wedge P(y, x))$

On montre que cet ensemble de formules est insatisfaisable par instanciation et par résolution :

1. *Mettre en forme clausale l'ensemble de ces trois formules.*
2. *Trouvez des instances contradictoires des clauses obtenues et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
3. *Donnez une preuve directe de cette contradiction par factorisation, copie et résolution binaire.*

□

Exercice 5 (Unification (20 points))
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes.
La signature utilisée est $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f3}, g^{f2}\}$.

1. $f(x, y, g(a, a)) = f(g(y, y), z, z)$
2. $f(x, y, a) = f(y, g(z, z), x)$
3. $f(x, y, g(x, y)) = f(y, g(z, z), z)$

□

Exercice 6 (Expansions (20 points))
Trouvez des contre-modèles des formules suivantes :

1. $\exists x \exists y(x \neq y) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists y \neg Q(y)$
2. $\forall x \forall y(x = y \Rightarrow P(x, y)) \Rightarrow \forall x \forall y P(x, y)$
3. $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(y, x)$

Indication *: il suffit de construire des 1 ou 2 expansions le cas échéant.*

□