EXAMEN Seconde session INF242, 2012-2013

Benjamin Wack

juin 2013
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
IMPORTANT :

– Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation. Nous nous autoriserons à enlever des points le cas échéant.
– De manière générale toute réponse non justifiée sera créditée de zéro point (par exemple indiquer les régles utilisées dans l'algorithme d'unification, dans la déduction naturelle ...).

L'ensemble de cet examen consiste à utiliser différentes techniques pour étudier une même formule. Sauf indication contraire, à chaque question, on repartira de la formule initiale donnée dans l'énoncé.

Exercice 1 (Logique propositionnelle) *(60 points)*

1. *Soit la formule* $A = ((q \Rightarrow r) \vee \neg p \wedge q) \wedge (r \Leftrightarrow s) \wedge (q \Leftrightarrow s)$.
   (a) *Réécrire* A *sous forme stricte et donner également sa représentation sous forme d'arbre. (5 points)*
   (b) *Construire la table de vérité de* A *et de toutes ses sous-formules. (5 points)*
   (c) *Transformer la formule* A *en somme de monômes. (5 points)*
   (d) *Peut-on en déduire que* A *est valide ? satisfaisable ? contradictoire ? Admet-elle un contre-modèle ? (5 points)*
   (e) *Transformer* A *en produit de clauses et appliquer l'algorithme DPLL sur cet ensemble de clauses. (8 points)*
   (f) *Quel monôme obtenu à la question (c) correspond au modèle obtenu à la question (e) ? (2 points)*
2. *Appliquer l'algorithme DPLL sur l'ensemble de clauses* $\{a+b+c+d+e+f, \bar{a}+b, \bar{b}+a, \bar{c}+d, \bar{d}+c, \bar{b}+\bar{c}, \bar{b}+c, b+\bar{c}, \bar{e}, \bar{f}\}$.
   Vous fournirez une trace de l'algorithme. Que peut-on en déduire quant à cet ensemble de clauses ? (10 points)
3. *Soit la formule* $B = (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \vee r$.
   (a) *Transformer* $\neg B$ *en produit de clauses. (5 points)*
   (b) *Montrer par résolution sur cet ensemble de clauses que* $\neg B$ *est contradictoire. (5 points)*
   (c) *Construire une preuve de* B *en déduction naturelle. (10 points)*

□

Exercice 2 (Unification) *(10 points)*

Donner les unificateurs les plus généraux des termes suivants s'ils existent :

1. $q(f(a), g(x)) = q(y, y)$
2. $p(a, x, f(g(y))) = p(z, f(z), f(u))$
3. $p(f(x), x) = p(y, g(y))$

□

Exercice 3 (Formalisation au premier ordre) *(5 points) Modéliser les affirmations suivantes en logique du premier ordre en utilisant uniquement les prédicats suivants d'arité 1 : ticket, gagnant, vendu.*

- *Il reste des tickets invendus.*
- *Tous les tickets gagnants ont été vendus.*
- *Les tickets invendus sont tous perdants.*

□

Exercice 4 (Logique du premier ordre) *(45 points)*

Considérons la formule suivante : $C = \forall x \forall y \forall z (e(x,y) \wedge e(y,z) \Rightarrow \neg e(x,z)) \Rightarrow \neg \exists x \forall y \; e(x,y)$

1. *Donner la 1-expansion de la formule C et simplifier la formule obtenue. Cette méthode suffit-elle à montrer que C est une formule valide ? (10 points)*
2. *Preuve par résolution :*
   (a) *Skolémiser $\neg C$ puis donner sa forme clausale. (10 points)*
   (b) *Trouver des instances contradictoires des clauses obtenues et montrer par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires. (5 points)*
   (c) *Donner une preuve directe par factorisation, copie et résolution binaire que la forme de Skolem de $\neg C$ est contradictoire. (5 points)*
3. *Montrer par Déduction Naturelle du premier ordre que C est une formule valide. (15 points)*

□