

EXAMEN Seconde session INF242, 2010-2011

Stéphane Devismes

Pascal Lafourcade

juin 2011

Total : 120 points

Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

Exercice 1 (Logique propositionnelle) (15 points)

1. (1 point) Donner une formule en FND avec minimum 3 variables.
2. (1 point) Donner une formule en FNC avec minimum 3 variables.
3. (1 points) Donner une tautologie différente de $\top$.
4. (2 points) Donner une formule avec deux variables ayant exactement deux modèles et deux contre-modèles.
5. (1 points) Faire la table de vérité de la formule donnée en question 4.
6. Nous étudions les formules suivantes : $A = x + y$, $B = x\bar{y} + \bar{x}y + x.y$
 - (4 points) Simplifier $A \Rightarrow B$ en utilisant les règles de simplification.
 - (5 points) Prouver par résolution que $A + \bar{B}$ est contradictoire

□

Exercice 2 (Formalisation) (45 points)

Nous considérons les hypothèses suivantes :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
 - (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
 - (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean
- Et la conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

1. (5 points) Formaliser en logique propositionnelle ces hypothèses, la conclusion et la négation de la conclusion en forme normale.
2. Montrer par les techniques suivantes que le raisonnement est correct.
 - (10 points) Table de vérité.
 - (10 points) Simplification.
 - (10 points) Résolution.
 - (10 points) Dédution naturelle.

□

Exercice 3 (Formalisation) (20 points) Soit $\Gamma = \{ \text{inf}(a, s(x_1)) , \text{inf}(x_2, y) \Rightarrow \text{inf}(s(x_2), s(y)) \}$.

- (5 points) Donner la signature Σ de Γ , la base de Herbrand de Γ ainsi que 2 instances de chacun des termes de Γ .
- (15 points) Donner les trois preuves possibles par résolution au premier ordre de $C = \text{inf}(x, s(s(s(a))))$ à partir de Γ .

□

Exercice 4 (Dédution naturelle premier ordre) (25 points) Exercice du Poly.

- (10 points) $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
- (15 points) $\forall x (Q(x) \Rightarrow \forall y (R(y) \Rightarrow P(x, y))) \Rightarrow \forall y (R(y) \Rightarrow \forall x (Q(x) \Rightarrow P(x, y)))$

□

```

bool fonction Algo(  $\Gamma$  : ensemble de clauses)
1  Si  $\perp \in \Gamma$ , retourner(faux).
2  Si  $\Gamma = \emptyset$ , retourner (vrai).
3  Soit  $x$  une variable quelconque de  $\Gamma$ 
4  retourner (Algo( $\Gamma[x := 0]$ ) ou alors Algo( $\Gamma[x := 1]$ ))

```

FIGURE 1 – Algorithme de résolution.

Exercice 5 (Raisonnement (15 points + 5 points bonus)) Prouver par récurrence que la fonction **Algo**(Γ) renvoie vraie si et seulement si Γ est un ensemble de clauses satisfaisable.

Dans cette preuve, vous pourrez utiliser le résultat de cours suivant :

Propriété 1 Soient Γ un ensemble de clauses et L un littéral. Γ a un modèle si et seulement si $\Gamma[L := 1]$ ou $\Gamma[L := 0]$ a un modèle.

Question bonus (5 points) :

– Combien y a-t-il d'appels récursifs de la fonction **Algo** dans le pire des cas ?

□