Partiel INF452

Stéphane Devismes Benjamin Wack

13 mars 2019
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

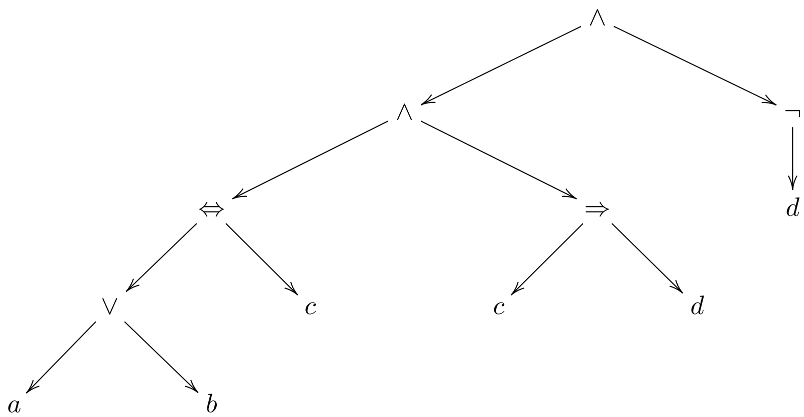
Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Modèles et formes normales (20 points))
Soit $A = (a \vee b \Leftrightarrow c) \wedge (c \Rightarrow d) \wedge \neg d$.

1. *Réécrivez cette formule sous forme d'arbre. (2 points)*
2. *Si c'est possible, donner un modèle de A et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(3 points)*
3. *Si c'est possible, donner un contre-modèle de A et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(3 points)*
4. *Déterminer une forme normale disjonctive de A. (6 points)*
5. *Déterminer une forme normale conjonctive de A. (6 points)*

Réponse:

1.



2. Un modèle v de A doit satisfaire :
   — $\neg d$ donc $v(d) = 0$
   — $c \Rightarrow d$ donc $v(c) = 0$
   — $a \vee b \Leftrightarrow c$ donc $[a \vee b]_v = 0$ d'où $v(a) = v(b) = 0$
3. Pour construire un contre-modèle il suffit qu'une des trois formules de la disjonction soit insatisfaite, donc par exemple toute assignation v telle que $v(d) = 1$ convient.
4. $$\begin{array}{lll} A & \equiv & \left((a+b).c + \overline{a+b}.\bar{c}\right).(\bar{c}+d).\bar{d} \quad \text{(élimination de} \Rightarrow \text{et} \Leftrightarrow) \\ & \equiv & (a.c + b.c + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}).\bar{c}.\bar{d} \quad \text{(distributivité, de Morgan, simplification)} \\ & \equiv & a.c.\bar{c}.\bar{d} + b.c.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} \quad \text{(distributivité)} \\ & \equiv & \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} \quad \text{(déf. négation)} \end{array}$$

5. La forme normale conjonctive est identique à la forme normale disjonctive.

□

Exercice 2 (Formalisation et Résolution (30 points)) [1]

Le capitaine Lagedu et son équipier Cogito ont pour mission de déterminer qui est responsable du hold-up de la banque de Prokur. Ils savent que seuls Alfred, Baptiste et Charly peuvent être responsables ; mais comme il n'y avait pas de témoins, ils sont forcés d'avoir recours à des mediums. Ceux-ci ne se trompent jamais, mais leurs indications sont parfois... difficiles à décrypter.

Lagedu recueille, perplexe, les affirmations suivantes :

— *Si Baptiste a trempé dans cette affaire, Charly aussi...*

— *Pour les hold-ups de banque, Alfred a horreur de faire équipe avec Charly.*

— *Si Alfred est coupable et Baptiste innocent, alors Charly est coupable.*

— *Charly n'a pas pu faire ce genre de boulot tout seul...*

*Alors qu'il fouille désespérément ses poches à la recherche d'un médicament contre sa migraine, Cogito s'écrie « *C'est limpide, si l'un d'entre eux au moins est coupable, ce sont forcément Baptiste et Charly qui ont fait le coup ! *».*

1. *Formaliser les quatre affirmations des mediums et la conclusion émise par Cogito. (10 points)*
2. *Transformer chacune des quatre affirmations ainsi que la négation de la conclusion en un ensemble de clauses équivalentes. (10 points)*
3. *Démontrer,* **par résolution**, *que la conclusion de Cogito se déduit des affirmations des mediums. (10 points)*

Réponse:

1. On note a, b et c respectivement pour Alfred, Baptiste ou Charly est coupable.
   — $b \Rightarrow c$
   — $\neg(a \wedge c)$
   — $a \wedge \neg b \Rightarrow c$
   — $c \Rightarrow a \vee b$
   — conclusion : $a \vee b \vee c \Rightarrow b \wedge c$
2. — $\bar{b} + c$
   — $\bar{a} + \bar{c}$
   — $\bar{a} + b + c$
   — $\bar{c} + a + b$
   — Négation de la conclusion : $a + b + c$ et $\bar{b} + \bar{c}$
3.

1 :	$\bar{b} + \bar{c}$	Hyp
2 :	$\bar{b} + c$	Hyp
3 :	$\bar{b}$	Res 1,2
4 :	$\bar{a} + b + c$	Hyp
5 :	$\bar{a} + c$	Res 3,4
6 :	$\bar{c} + a + b$	Hyp
7 :	$\bar{c} + a$	Res 3,6
8 :	$\bar{a} + \bar{c}$	Hyp
9 :	$\bar{c}$	Res 7,8
10 :	$\bar{a}$	Res 5,9
11 :	$a + b + c$	Hyp
12 :	$b + c$	Res 10,11
13 :	c	Res 3,12
14 :	$\perp$	Res 9,13

□

1. Ce problème est extrait de la superbe (et défunte) revue *Jeux et Stratégie*.

Exercice 3 (DPLL (20 points))

Appliquer l'algorithme `DPLL` *sur chacun des ensembles de clauses suivants. Vous donnerez la trace de l'algorithme sous forme arborescente en étiquetant clairement chaque étape par la règle utilisée et les assignations qui en découlent. Vous interpréterez clairement les résultats obtenus lorsque l'algorithme se termine et vous donnerez un modèle le cas échéant.*

1. $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, a+\bar{b}+\bar{a}, \bar{c}+\bar{d}, a+c+d, \bar{c}+\bar{d}+e, \bar{a}+b+d+e, c+\bar{e}\}$ *(10 points)*
2. $\{b+\bar{d}, a+c, \bar{a}+\bar{c}+d, \bar{b}+a, \bar{c}+b, \bar{a}+c, a+b+c+d, \bar{a}+\bar{b}\}$ *(10 points)*

Réponse:

1. $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, a+\bar{b}+\bar{a}, \bar{c}+\bar{d}, a+c+d, \bar{c}+\bar{d}+e, \bar{a}+b+d+e, c+\bar{e}\}$

   VAL $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, \bar{c}+\bar{d}, a+c+d, \bar{c}+\bar{d}+e, \bar{a}+b+d+e, c+\bar{e}\}$

   RE $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, \bar{c}+\bar{d}, a+c+d, c+\bar{e}\}$

   ELI $e=0$ $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, \bar{c}+\bar{d}, a+c+d\}$

   $a=0$ $\{\bar{b}+c, \bar{c}+\bar{d}, c+d\}$

   ELI $b=0$ $\{\bar{c}+\bar{d}, c+d\}$

   $c=0$ d

   ELI $d=1$ $\emptyset$

   Modèle $e=0$, $a=0$, $b=0$, $c=0$ et $d=1$.
2. $\{b+\bar{d}, a+c, \bar{a}+\bar{c}+d, \bar{b}+a, \bar{c}+b, \bar{a}+c, a+b+c+d, \bar{a}+\bar{b}\}$

   RE $\{b+\bar{d}, a+c, \bar{a}+\bar{c}+d, \bar{b}+a, \bar{c}+b, \bar{a}+c, \bar{a}+\bar{b}\}$

   — $a=0$ $\{b+\bar{d}, c, \bar{b}, \bar{c}+b\}$

     ELI $d=0$ $\{c, \bar{b}, \bar{c}+b\}$

     RU $c=1; b=0$ $\perp$

   — $a=1$ $\{b+\bar{d}, \bar{c}+d, \bar{c}+b, c, \bar{b}\}$

     RU $c=1; b=0$ $\{\bar{d}, d, \perp\}$

   La formule est contradictoire.

□

Exercice 4 (Déduction naturelle (30 points))

Prouver, **par déduction naturelle***, les formules suivantes. Vous présenterez vos preuves sous forme de tableaux.*

1. $a \vee b \Rightarrow (\neg b \Rightarrow (a \vee c))$ *(10 points)*
2. $\neg(c \vee \neg d) \Rightarrow (\neg c \wedge d)$ *(10 points)*
3. $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow (b \wedge d))$ *(10 points)*

Réponse:

1. $a \vee b \Rightarrow \neg b \Rightarrow a \vee c$

```
1    assume a + b.
2      assume -b.
3        assume a.
4          a + c.                                   +I1 3
5        therefore a => a + c.                      =>I 3,4
6        assume b.
7          F.                                       =>E 2,6
8          a + c.                                   Efq 7
9        therefore b => a + c.                      =>I 6,8
10       a + c.                                     +E 1,5,9
11     therefore -b => a + c.                       =>I 2,10
12   therefore a + b => -b => a + c.                =>I 1,11
```

2. $\neg(c \vee \neg d) \Rightarrow \neg c \wedge d$

```
1    assume -(c + -d).
2      assume c.
3        c + -d.                                    +I1 2
4        F.                                         =>E 1,3
5      therefore -c.                                =>I 2,4
6      assume -d.
7        c + -d.                                    +I2 6
8        F.                                         =>E 1,7
9      therefore --d.                               =>I 6,8
10     d.                                           Raa 9
11     -c & d.                                      &I 5,10
12   therefore -(c + -d) => -c & d.                 =>I 1,11
```

3. $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow a \wedge c \Rightarrow b \wedge d$

```
1    assume (a => b) & (c => d).
2      assume a & c.
3        a.                                         &E1 2
4        c.                                         &E2 2
5        a => b.                                    &E1 1
6        c => d.                                    &E2 1
7        b.                                         =>E 5,3
8        d.                                         =>E 6,4
9        b & d.                                     &I 7,8
10     therefore a & c => b & d.                    =>I 2,9
11   therefore (a => b) & (c => d) => a & c => b & d.      =>I 1,10
```

□

Exercice 5 (Démonstration par récurrence (20 points, exo du poly))

Soit Γ *un ensemble de clauses. Un littéral de* Γ *est un littéral d'une clause de* Γ.

Montrer, par récurrence sur la taille d'une preuve, que toute clause déduite de Γ *ne comporte que des littéraux de* Γ.

Réponse: Par définition du résolvant, les littéraux d'un résolvant de deux clauses sont éléments des deux clauses parentes. Par suite, en *répétant* des résolutions à partir de Γ, nous obtenons des clauses dont tous les littéraux sont éléments de Γ.

Formalisons ce raisonnement : soit C une clause déduite de Γ, il y a une suite de clauses $B_1, \dots B_n$, preuve de C à partir de Γ. Montrons par induction que pour tout i compris entre 1 et n, B_i (donc $C = B_n$) ne comporte que des littéraux de Γ.

Supposons que pour tout j où $1 \leq j \leq n$ et $j < i$, les littéraux de B_j sont des littéraux de Γ et montrons qu'il en de même de B_i lorsque $1 \leq i \leq n$. Soit i où $1 \leq i \leq n$, nous avons deux cas à considérer :

- $B_i \in \Gamma$ et évidemment tous les littéraux de B_i sont des littéraux de Γ.
- B_i est résolvant des clauses B_k et B_l avec $1 \leq k < i$ et $1 \leq l < i$. Par hypothèse de récurrence, les littéraux de B_k et B_l sont des littéraux de Γ. Puisque les littéraux d'un résolvant de deux clauses sont éléments des deux clauses parentes, les littéraux de B_i sont des littéraux de Γ.

Par suite pour tout i où $1 \leq i \leq n$, tous les litteraux de B_i sont des littéraux de Γ.

$\square$