Partiel INF452

Stéphane Devismes Benjamin Wack

9 mars 2017
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Table et formes normales (25 points))
Soit $A = a \Rightarrow b \wedge c \vee \neg a \Leftrightarrow b$.

1. *Donner la formule stricte dont A est l'abréviation.*
2. *Donner la représentation en arbre de A.*
3. *Donner la table de vérité de A.*
4. *Mettre A en forme normale conjonctive, et utiliser cette forme normale pour déterminer un contre-modèle.*
5. *Mettre A en forme normale disjonctive, et utiliser cette forme normale pour déterminer un modèle.*

□

Exercice 2 (Résolution (26 points))
Fricotin propose à sa femme Pétula de travailler avec lui. Pour la convaincre, il lui dit :
— *« Tu auras un salaire si et seulement si tu travailles. »*
Pétula lui rétorque :
— *« Si je reste à la maison, alors je ne travaillerai pas. »*
— *« De plus, si j'élève nos enfants, alors je dois rester à la maison. »*
Fricotin répond alors :
— *« Tu pourras avoir un salaire et élever nos enfants. »*
Questions :

1. *Donner la forme normale conjonctive de $x \Leftrightarrow y$.*
2. *Formaliser les quatre affirmations précédentes en logique propositionnelle.*
3. *Transformer les énoncés formels en un ensemble de clauses équivalentes.*
4. *Démontrer, par résolution, que les affirmations de Fricotin et Pétula sont contradictoires.*

□

Exercice 3 (DPLL (21 points))
Appliquer l'algorithme `DPLL` *sur chacun des ensembles de clauses suivants. Vous donnerez la trace de l'algorithme sous forme arborescente en étiquetant clairement chaque étape par la règle utilisée et les assignations qui en découlent. Vous interpréterez clairement les résultats obtenus lorsque l'algorithme se termine.*

1. $A = \{x + y + \bar{z},\ \bar{x} + \bar{y},\ x + \bar{y},\ z + t,\ x + \bar{z},\ \bar{t} + y\}$
2. $B = \{\bar{x} + z,\ \bar{t} + x,\ \bar{t} + \bar{x} + t,\ \bar{t} + \bar{z},\ \bar{y} + t,\ \bar{t} + y,\ y\}$
3. $C = \{\bar{x} + y,\ x + z,\ x + y + t,\ \bar{z} + y,\ t + z + y,\ z + \bar{y},\ \bar{z} + \bar{x},\ \bar{y} + x\}$

□

Exercice 4 (Déduction naturelle (28 points))
Prouver, par déduction naturelle, les formules suivantes :

1. $a \wedge \neg a \Rightarrow b \vee c$
2. $(a \Rightarrow b \wedge c) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a \vee c)$
3. $\neg(\neg a \vee b) \Rightarrow a \wedge \neg b$
4. $(a \Rightarrow b) \wedge (a \vee b) \Rightarrow b$

□

Exercice 5 (Ensemble complet et incomplet de connecteurs, exercice du poly (20 points))
Un ensemble de constantes et de connecteurs est dit complet*, si toute fonction booléenne est exprimable avec ces constantes et ces connecteurs. Nous avons notamment vu en cours un théorème qui exprime que l'ensemble* $\{\bot, \top, \neg, \vee, \wedge\}$ *est complet.*

1. *Soit* $|$ *l'opération suivante :* $x \mid y$ *est vrai si et seulement si ni l'un, ni l'autre ne sont vrais, autrement dit* $x \mid y = 1$ *si et seulement si* $x = 0$ *et* $y = 0$. *Cette opération est aussi appelée* ni *car* $x \mid y$ *est vrai si et seulement si ni* x*, ni* y *ne sont vrais.*

   Montrer que cette opération (seule !) est complète.
2. *Montrer que l'ensemble* $\{\top, \Rightarrow\}$ *est incomplet.*

   Indication *: on pourra montrer que toute formule construite uniquement avec* $\top$ *et* $\Rightarrow$ *prend la valeur 1 quand toutes ses variables prennent la valeur 1. On en déduira alors assez facilement une fonction booléenne qui ne peut pas être exprimée avec cet ensemble.*

□