Partiel INF242

Stéphane Devismes   Benjamin Wack

7 mars 2016
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

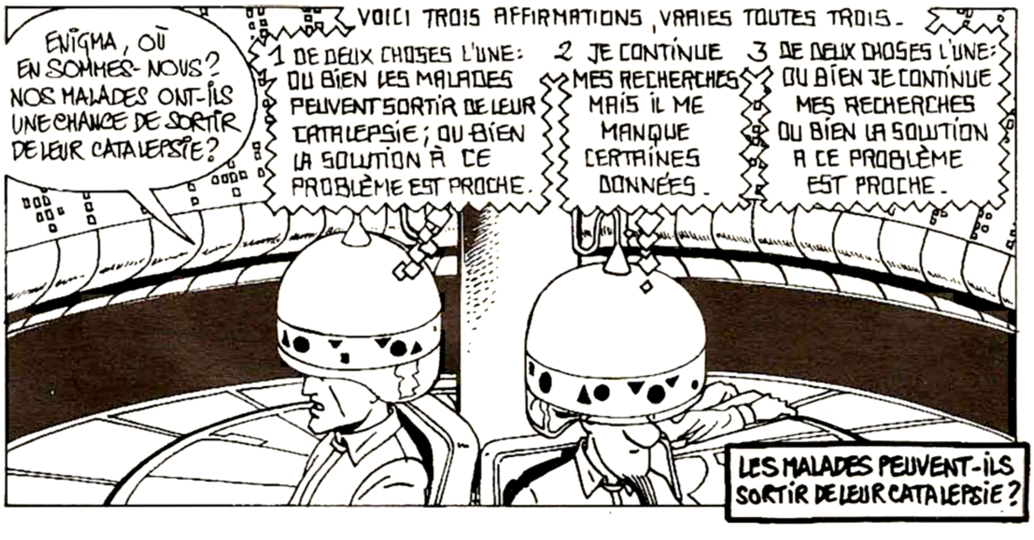
Exercice 1 (Table de vérité (15 points)) *Pour la formule* $a \vee b \wedge c \Rightarrow a \Leftrightarrow \neg c$*, donner :*

1. *la formule stricte associée,*
2. *la structure en arbre associée,*
3. *la table de vérité,*
4. *un modèle et*
5. *un contre-modèle.*

□

Exercice 2 (Formalisation et mise en forme normale (20 points))

L'énigme ci-dessous est extraite de l'excellente série Le chemin des étoiles *de Jean-Claude Baillif et Claude Lacroix, publiée dans la non moins excellente revue* Jeux et stratégie *(numéro 25 de février 1984).*



1. *Comment peut-on formaliser en logique propositionnelle une affirmation du type « De deux choses l'une : ... » ?*
2. *Formaliser la conjonction des trois affirmations d'Enigma, en précisant bien les variables propositionnelles utilisées.*
3. *Mettre cette formule en forme normale disjonctive et utiliser cette forme pour répondre à la question posée.*

$\square$

Exercice 3 (Déduction naturelle (25 points))
Démontrer les formules suivantes en déduction naturelle :

1. $q \wedge \neg(p \vee q) \Rightarrow p$
2. $(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow p$

$\square$

Exercice 4 (Démonstration par récurrence (20 points))

1. *Démontrer que toute formule (stricte) construite uniquement avec :*
   - *des variables propositionnelles,*
   - *les connecteurs* $\vee$ *et* $\wedge$*,*
   - *et les constantes* $\top$ *et* $\bot$

   est dans un des deux cas suivants :
   - *elle admet pour modèle l'assignation* v *qui à toute variable propositionnelle associe la valeur* 1.
   - *ou elle est équivalente à* $\bot$.
2. *Énoncer (sans la démontrer) une propriété similaire sur l'existence d'un contre-modèle pour ces formules.*
3. *En déduire que l'ensemble* $\{\vee, \wedge, \top, \bot\}$ *n'est pas complet, autrement dit qu'il existe une formule qu'on ne peut pas réécrire de façon équivalente avec ces seuls connecteurs et constantes.*

$\square$

Exercice 5 (Formalisation et résolution (20 points))
Les Beatles étaient un groupe de rock qui s'est formé dans les années soixantes à Liverpool. Ce groupe était composé de quatres garçons : Ringo Starr, Paul MacCartney, John Lennon et Georges Harrison. À l'époque où s'est formé le groupe, il n'a pas été évident de décider qui allait jouer de quel instrument. Pour preuve, voici un extrait de leurs discussions :

Paul dit : *« Si Ringo ne joue pas de la guitare, alors je jouerai de la basse et John jouera de la guitare »,*

Georges dit : *« Je jouerai de la guitare si et seulement si John en joue »,*

John dit : *« Si Paul joue de la basse, alors Georges jouera de la guitare »,*

Ringo dit : *« Je jouerai de la batterie et donc pas de la guitare ».*

Après cette discussion, ils décidèrent que :
- *Ringo jouerait à la batterie,*
- *Paul jouerait de la basse, et que*
- *John et Georges joueraient tous les deux de la guitare.*

Nous allons maintenant montrer que cette conclusion a satisfait tous les membres du groupe.

1. *Formalisez les quatres hypothèses et la conclusion en utilisant les variables propositionnelles suivantes :*
   - RB *: « Ringo joue de la batterie »,*
   - RG *: « Ringo joue de la guitare »,*
   - PB *: « Paul joue de la basse »,*
   - JG *: « John joue de la guitare », et*
   - GG *: « Georges joue de la guitare ».*
2. *Transformez en clauses les hypothèses et la négation de la conclusion.*
3. *Démontrez avec une preuve par résolution que la conclusion est conséquence des hypothèses.*

$\square$

Exercice 6 (DPLL, exercice du Poly (20 points)) *Utiliser l'algorithme DPLL pour déterminer si les ensembles suivants de clauses sont satisfaisables ou insatisfaisables :*
- $\{b + j + \overline{a}, a + j + \overline{b}, b + a + j, a + j, j + b, \overline{b} + \overline{j}, \overline{j} + b, j + s, \overline{s} + \overline{b}\}$.
- $\{a + \overline{c} + d, \overline{b} + c + f, b + \overline{e} + f, \overline{c} + e + \overline{f}, e + f, c + d, \overline{a}, \overline{e} + \overline{f}\}$.

Donner une trace de l'algorithme et en déduire un modèle lorsque l'ensemble de formules est satisfaisable.

$\square$