

# Partiel INF242

Stéphane Devismes

Benjamin Wack

11 mars 2013

2 pages

Total : 120 points

Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

L'épreuve sera notée sur 120 points, les 15 points supplémentaires sont considérés comme du bonus.

Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

**Exercice 1 (20 points)** On considère les deux formules suivantes en logique propositionnelle :

- $A = (p \vee q \Rightarrow p \vee r) \Rightarrow p \wedge (q \Rightarrow r)$
- $B = p \wedge \neg q \vee \neg(p \vee \neg q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$

1. (2 points) Réécrivez chacune des formules sous sa forme stricte et donnez également leur représentation sous forme d'arbre.
2. (10 points) Construire la table de vérité de chacune de ces formules.
3. (3 points) Pour chacune de ces formules, dire si elle est :
  - valide
  - contradictoire
  - satisfaisable
4. (1 point) Si c'est possible, donner un modèle de  $A$ . Sinon, expliquer pourquoi.
5. (1 point) Si c'est possible, donner un contre-modèle de  $B$ . Sinon, expliquer pourquoi.
6. (3 points) Déterminer une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive pour chacune de ces formules.

□

**Exercice 2 (Formalisation (17 points))** Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :

**BROWN** : Jones est coupable et Smith est innocent.

**JONES** : si Brown est coupable, alors Smith aussi.

**SMITH** : je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.

Soit  $B, J, S$  les énoncés : « Brown est innocent », « Jones est innocent », « Smith est innocent ».

1. (3 points) Formaliser le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique.
2. Répondre aux questions suivantes :
  - (a) (1 point) Les témoignages sont-ils compatibles ? (existe-t-il un modèle ?)
  - (b) (3 points) Quel témoignage est conséquence d'un des deux autres ? (Justifiez à partir du formalisme logique.)
  - (c) (2 points) En supposant que tous sont innocents, qui aurait produit un faux témoignage ? (Justifiez à partir du formalisme logique.)
  - (d) (3 points) En supposant que le témoignage de chacun des suspects est vrai, qui est innocent, qui est coupable ? (Justifiez avec un modèle.)

- (e) (5 points) *En supposant que chaque innocent dit la vérité et que chaque coupable ment, qui est innocent et qui est coupable ? Justifiez à partir du formalisme logique. (Indice : la valeur d'un témoignage est équivalente au statut du suspect.)*

□

**Exercice 3 (Complétude de l'ensemble  $\{\oplus, \wedge, 1\}$  (8 points))** *Nous rappelons la table de vérité de l'opérateur Xor, noté  $\oplus$ .*

$x$	$y$	$x \oplus y$
$0$	$0$	$0$
$0$	$1$	$1$
$1$	$0$	$1$
$1$	$1$	$0$

*Montrez que l'ensemble  $\{\oplus, \wedge, 1\}$  est complet.*

□

**Exercice 4 (Résolution (20 points))** *Montrez par résolution que les ensembles de formules suivants sont insatisfaisables :*

- (5 points)  $\{\bar{q} + m, \bar{q} + \bar{m} + \bar{r}, \bar{q} + \bar{m} + r, \bar{p} + r, \bar{p} + \bar{r}, p + q\}$
- (15 points)  $\{a \Rightarrow b + c, b \Leftrightarrow d, c \Rightarrow d + \bar{a}, d \Rightarrow c + \bar{a}, \bar{a} \Rightarrow e, e \Rightarrow b + d, b \Rightarrow \bar{c} + \bar{d}, \bar{e} + a\}$

□

**Exercice 5 (DPLL (20 points))** *Déterminez en appliquant l'algorithme de DPLL si chacun des ensembles de clauses suivants est satisfaisable. Le cas échéant, vous donnerez le modèle exhibé par DPLL.*

1. (10 points)  $\{a + \bar{b} + \bar{d}, \bar{a} + c + \bar{d}, \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{a} + b + c, a + b + c + d, a + \bar{d} + c, a + \bar{c} + d, \bar{c} + b, c + d + \bar{b}\}$
2. (10 points)  $\{a + \bar{c} + d, \bar{b} + c + f, b + \bar{e} + f, \bar{c} + e + \bar{f}, e + f, c + d, \bar{a}, \bar{e} + \bar{f}\}$

□

**Exercice 6 (Dédution Naturelle (30 points))** *Donner une preuve des formules suivantes en utilisant la déduction naturelle sous forme de tableau :*

- (10 points)  $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow r$ .
- (10 points)  $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$ .
- (10 points)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p)$ .

□

**Exercice 7 (Récurrence, exercice du photocopié (20 points))** *Montrer que toute formule à une seule variable construite sans négation et uniquement avec  $\vee$  et  $\wedge$  est équivalente à une formule de taille 0.*

□