Partiel INF242

Stéphane Devismes Martin Gagné Pascal Lafourcade

mars 2012
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

Exercice 1 (Définitions (16 points)) *Soit la formule* $A = (\overline{x} \Rightarrow (y \vee z) \Rightarrow (\overline{(z \wedge y)} \Rightarrow x))$

1. *(2 points) Donner un modèle de A.*
2. *(2 points) Donner un contre-modèle de A.*
3. *(6 points) Mettre A en forme normale conjonctive.*
4. *(6 points) Mettre A en forme normale disjonctive.*

□

Exercice 2 (Exercice du Poly : Déduction naturelle (30 points)) *Donner une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :*

- *(10 points)* $\neg(a \vee b) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.
- *(10 points)* $(\neg a \vee \neg b) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$.
- *(*) (10 points)* $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$.

□

Exercice 3 (Formalisation et simplification : élection présidentielle (22 points)) *Un politologue « averti » vous fournit les informations suivantes :*

1. *François se présentera.*
2. *Si François se présente, c'est qu'il aura obtenu les 500 signatures.*
3. *Si Jean-Pierre se présente, c'est qu'il aura obtenu les 500 signatures.*
4. *Si Hervé se présente, c'est qu'il aura obtenu les 500 signatures.*
5. *Si François et Hervé obtiennent 500 signatures, alors Jean-Pierre ne pourra pas les avoir.*
6. *Parmi Hervé et Jean-Pierre, au moins l'un des deux se présentera.*

Pouvez-vous déduire que soit Hervé, soit Jean-Pierre se présentera, mais pas les deux ?

Questions :

- *(7 points) Formaliser ce raisonnement en logique propositionnelle en utilisant les notations suivantes :*
  - sh *: Hervé obtiendra les 500 signatures.*
  - sf *: François obtiendra les 500 signatures.*
  - sjp *: Jean-Pierre obtiendra les 500 signatures.*
  - ph *: Hervé se présentera.*
  - pf *: François se présentera.*
  - pjp *: Jean-Pierre se présentera.*
- *(7 points) Mettre la conjonction des énoncés et la négation de la conclusion en forme normale conjonctive.*
- *(8 points) Montrer que le raisonnement est correct par résolution.*

□

Exercice 4 (DPLL : (20 points)) *Considérons l'ensemble de clauses*

$$\Gamma = \{a + \overline{b} + c + \overline{a} + c, a + b + \overline{c}, c, c + b, d + \overline{b}, \overline{g} + d + \overline{a}, \overline{g} + e + f, \overline{a} + g + \overline{b}, \overline{a} + \overline{e} + \overline{f}\}$$

Questions : Appliquer l'algorithme de DPLL, afin de montrer que cet ensemble de clauses possède un modèle (vous donnerez aussi le modèle obtenu avec DPLL).

□

Exercice 5 (Raisonnement : Incomplétude du Xor et de la négation (32 points)) *Nous rappelons la table de vérité de l'opérateur Xor, noté $\oplus$.*

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'objectif de cet exercice est de démontrer l'incomplétude de l'ensemble $\{0, 1, \oplus, -\}$.

1. *(10 points) Soient A, B et C des formules.*
   - *(1 point) Montrer que 0 est l'élément neutre du $\oplus$.*
   - *(1 point) Montrer que $\oplus$ est commutatif : $A \oplus B \equiv B \oplus A$.*
   - *(2 point) Montrer que $\oplus$ est associatif : $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$.*
   - *(2 points) Montrer que $A \oplus \overline{B} \equiv \overline{A} \oplus B$.*
   - *(2 points) Montrer que $A \oplus \overline{B} \equiv \overline{A \oplus B}$*
   - *(2 points) Exprimer la négation de A en utilisant l'opérateur $\oplus$ et la constante 1.*
2. *Une formule F est en* X-Forme normale *(XFN) si et seulement si F est soit 0, soit 1, soit une formule utilisant uniquement les opérateurs $-$ et $\oplus$, et dont les négations portent uniquement sur des variables.*

   (10 points) Soit A une formule (stricte) écrite sur $\{0, 1, \oplus, -\}$. Montrer par récurrence qu'après un nombre fini d'application des règles de transformation données ci-dessous, nous obtenons une formule en X-Forme normale équivalente à A.
   - $\overline{(A \oplus B)}$ *se transforme en* $(A \oplus \overline{B})$.
   - $\overline{\overline{A}}$ *se transforme en* A.
   - $(0 \oplus A)$ *se transforme en* A.
   - $(A \oplus 0)$ *se transforme en* A.
   - $(1 \oplus A)$ *se transforme en* $\overline{A}$.
   - $(A \oplus 1)$ *se transforme en* $\overline{A}$.

   Indice : la preuve par récurrence utilisera la mesure m définie comme suit :
   - $m(0) = 1$
   - $m(1) = 1$
   - $m(x) = 1$
   - $m((A \oplus B)) = 2 * (m(A) + m(B))$
   - $m(\overline{A}) = 2 * m(A)$

   L'opérateur $\oplus$ étant associatif, toute formule en X-Forme normale peut être transformée en une formule en X-Forme normale équivalente non parenthésée. Ainsi, nous considérerons maintenant uniquement des formules en X-Forme normale non parenthésées.
3. *(10 points) Propriété de la X-Forme normale : montrer par récurrence sur le nombre d'opérateurs $\oplus$ que toute formule en XFN a une table de vérité de la forme suivante :*
   - *elle ne contient que des 1,*
   - *elle ne contient que des 0,*
   - *elle contient autant de 1 que de 0.*

   Indice : si une formule en XFN est de la forme $A \oplus L$ où L est un littéral, alors trois cas sont possible : L est un littéral de A, L^c est un littéral de A, ou ni L, ni L^c n'est un littéral de A.
4. *(2 points) Déduire que l'ensemble $\{0, 1, \oplus, -\}$ n'est pas complet.*

□