Partiel INF242, 2009-2010

Stéphane Devismes   Pascal Lafourcade

Lundi 22 mars 2010

Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes personnelles format A4

Le barème des exercices est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

Exercice 1 (Complétude : 15 points) *Soit A la formule*

$$(((a \Rightarrow \neg b) \Leftrightarrow \neg c) \wedge (c \vee d)) \wedge (a \Leftrightarrow d)$$

1. *(1 points) Ecrire l'arbre associé à A.*
2. *(2 points) Donner la définition de tautologie et de contradiction.*
3. *(2 points) A est-elle une tautologie ? (justifier)*
4. *(2 points) A est-elle une contradiction ? (justifier)*
5. *(4 points) Donner la forme normale conjonctive de A (détailler).*
6. *(4 points) Donner la forme normale disjonctive de A (détailler).*

□

Exercice 2 (Formalisation : 20 points) *Rappelons que : « x à moins que y »se formalise en $\neg(x \Leftrightarrow y)$.*

Dans une maison hantée, les esprits se manifestent sous deux formes différentes, un **chant obscène** *et un* **rire sardonique***, dont on peut cependant influencer le comportement en jouant de l'orgue ou en brûlant de l'encens. Compte-tenu des données suivantes :*

(i) Le chant ne se fait pas entendre, à moins que l'on joue de l'orgue sans que le rire se fasse entendre.
(ii) Si on brûle de l'encens, le rire se fait entendre si et seulement si le chant se fait entendre.
(iii) (En ce moment) Le chant se fait entendre et le rire est silencieux.
Et de la conclusion :
(iv) (En ce moment) On joue de l'orgue et on ne brûle pas d'encens.
Nous posons :

- *c : le chant se fait entendre*
- *o : on joue de l'orgue*
- *r : le rire se fait entendre*
- *e : on brûle de l'encens*

1. *(2 points) Simplifier en produit de clauses $\neg(x \Leftrightarrow y)$.*
2. *(9 points) Formaliser sous forme de produits de clauses les hypothèses et la* **négation de la conclusion***.*
3. *(9 points) Prouver par résolution que le raisonnement est correct.*

□

Exercice 3 (Davis et Putnam : 15 points) *Dans l'arbre d'appel vous étiquetterez les étapes comme suit :*

- *suppression des clauses valides, en abrégé VAL*
- *réduction, en abrégé RE,*
- *enlèvement des clauses ayant des littéraux isolés, en abrégé ELI*
- *résolution unitaire, abrégé en RU.*

Considérons l'ensemble de clauses suivant :

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{f}, a + b + f, e + \bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + c, d + a + \bar{d}, a + b, \bar{a} + \bar{c} + \bar{d}, d$$

- *(10 points) Appliquer l'algorithme de Davis et Putnam sur cet ensemble de clauses et conclure si cet ensemble est satisfaisable ou non.*
- *(5 points) Donner un modèle ou un contre-modèle obtenu à partir de la trace de l'algorithme.*

□

Exercice 4 (Stratégie complète : 20 points) *Soit les clauses suivantes*

$$p + q, \bar{p} + s, \bar{s} + t, \bar{t}, \bar{q} + r, \bar{r}, \bar{r} + p + t, q + z + \bar{z}, \bar{q} + r + s$$

Appliquer l'algorithme de la stratégie compléte sur cet ensemble de clauses et conclure si cet ensemble est satisfaisable ou non.

□

Exercice 5 (Déduction Naturelle : 20 points) *(Exercice vu en TD).*

Donnez une preuve sous forme de tableau à quatre colonnes (contexte, numéro de ligne, formule, justification) des formules suivantes :

- *(5 points)* $a \wedge b \Rightarrow b \wedge a$
- *(5 points)* $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d)$
- *(5 points)* $(b \vee c)$ *dans l'environnement* $((b \Rightarrow \perp) \Rightarrow c)$.

□

Exercice 6 (Incomplétude : 30 points) *Nous rappelons la définition de la* taille d'une formule A, *notée* $|A|$, *est définie inductivement par :*

- $|\top| = 0$ *et* $|\perp| = 0$.
- $|x| = 0$, *si* x *est une variable.*
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|A \circ B| = |A| + |B| + 1$, *si* $\circ$ *est une des opérations . ou +.*

Nous rappelons qu'un ensemble de constantes ($\top$, $\perp$) et de connecteurs est complet, si toute fonction booléenne est exprimable avec ces constantes et ces connecteurs.

Montrons d'une autre manière que celle vue en TD que l'ensemble $\{0, 1, \vee, \wedge.\}$ *est incomplet.*

- *(25 points) Montrer par induction que toute formule d'une seule variable constituée de* $\{\top, \perp, \vee, \wedge\}$ *est équivalente à une formule de taille nulle.*
- *(2 points) Quelle est la taille de* $\neg x$ *?*
- *(3 points) En déduire que l'ensemble* $\{\top, \perp, \vee, \wedge\}$ *est incomplet.*

□