EXAMEN INF242, 2010-2011

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade

27 mai 2011
Durée : 2h00, Total : 120 points

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

IMPORTANT :
- Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation. Nous nous autoriserons à enlever des points le cas échéant.
- De manière générale toute réponse non justifiée sera créditée de zéro point (par exemple indiquer les régles utilisées dans l'algorithme d'unification, dans la déduction naturelle ...).

Exercice 1 (Formalisation au premier ordre) *(20 points)*

1. *(13 points) Utilisez les abréviations suivantes :*
   - $R(x, y)$ *pour* x *est en retard à l'examen dans la matière* y.
   - $A(x, y)$ *pour* x *est admis pour son examen dans la matière* y.
   - $B(x, y)$ *pour* x *est bon dans la matière* y.
   - $S(x)$ *pour* x *est sérieux.*

   pour formaliser les énoncés suivants :
   (a) *Quelque soit la matière, il y a un élève sérieux ou bon dans cette matière. (2pts)*
   (b) *Si un élève est sérieux, alors il sera à l'heure à tous ses examens. (2pts)*
   (c) *Si un élève est bon dans une matière et qu'il n'est pas en retard à l'examen de cette matière, alors il sera admis pour l'examen. (3pts)*
   (d) *Si un élève est à l'heure à un examen alors, s'il est sérieux, il réussira son examen. (3pts)*
   (e) *Si un élève est en retard à l'examen d'une matière, alors, s'il n'est pas bon dans cette matière, il ratera l'examen. (3pts)*
2. *(7 points) Formalisez l'affirmation suivante : "Il y a un élève qui a réussi tous ses examens." (2pts) puis montrez que l'ensemble d'affirmations de la question 1 n'engendre pas forcément l'affirmation de la question 2 en donnant un modèle pour l'ensemble des affirmations de la question 1 qui serait un contre-modèle de l'affirmation de la question 2. (5pts)*

□

Exercice 2 (Expansion et contre-modèle (exercice du Poly)) *(10 points)*

Rappel *: un contre-modèle d'une formule est un modèle de sa négation.*
Trouver, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :

1. *(5 points)* $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.
2. *(5 points)* $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x Q(x)$.

□

Exercice 3 (Unification) *(8 points) Donner les unificateurs les plus généraux des termes suivants s'ils existent, où* x, y, z *sont des variables et* a, b *des constantes et* $crypt$ *et* $pair$ *sont des symboles de fonctions binaires :*

1. $pair(a, crypt(z, b))$ et $pair(x, y)$
2. $pair(crypt(x, b), crypt(y, b))$ et $pair(crypt(a, b), z)$
3. $crypt(pair(z, a), x)$ et $crypt(pair(y, crypt(x, b)), b)$
4. $crypt(pair(a, z), x)$ et $crypt(pair(y, crypt(x, b)), b)$

□

Exercice 4 (Skolémisation et Résolution au premier ordre) *(12 points)*

Le but de cet exercice est de démontrer le syllogisme suivant :

$$\forall x(homme(x) \Rightarrow mortel(x)) \wedge homme(Socrate) \Rightarrow mortel(Socrate)$$

- *(4 points) Skolémiser la* **négation** *du syllogisme.*
- *(4 points) Transformer la forme de Skolem obtenue en forme clausale.*
- *(4 points) Démontrer par instantiation que la* **négation** *du syllogisme est une contradiction.*
- *Démontrer en utilisant une preuve par factorisation, copie et résolution binaire que la négation du syllogisme est une contradiction.*

□

Exercice 5 (Résolution au premier ordre) *(25 points)*

En utilisant une preuve par factorisation, copie et résolvant binaire prouver que la fermeture universelle de l'ensemble de clauses suivant est insatisfiable :

- $P(f(x)) \vee \neg Q(y, a)$
- $Q(a, a) \vee R(x, x, b) \vee S(a, b)$
- $S(a, z) \vee \neg R(x, x, b)$
- $\neg P(f(a)) \vee R(x, a, b)$
- $\neg S(y, z) \vee \neg S(a, b)$

(10 points) En utilisant une preuve par **factorisation, copie et résolvant binaire** *prouver que la fermeture universelle de l'ensemble de clauses suivant est insatisfiable :*

- $P(x)$
- $\neg P(x) \vee Q(x, y)$
- $\neg Q(x, a) \vee \neg Q(b, y) \vee \neg Q(b, a) \vee \neg P(f(y))$

(15 points) En utilisant une preuve par **factorisation, copie et résolvant binaire** *prouver que la fermeture universelle de l'ensemble de clauses suivant est insatisfiable :*

- $x = a$
- $y = b$
- $z = a + b$
- $\neg(b < x + b) \vee (a + b < a)$
- $y < z$
- $\neg(a + b < x) \vee \neg(y = z)$

Rappel : le symbole + est plus prioritaire que le symbole <, qui est lui-même plus prioritaire que les connecteurs logiques binaires.

□

Exercice 6 (Déduction naturelle) *(25 points)*

Prouver les formules suivantes en utilisant la déduction naturelle sous forme de **tableau :**

- **(10 points)** $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$
- **(15 points)** $\exists x \forall y\ x = y \Rightarrow \forall x \forall y\ x = y$

□

Exercice 7 (Cohérence de la résolution au premier ordre) *(20 points) En utilisant les trois propriétés ci-dessous, prouver la cohérence de la résolution au premier ordre, c'est-à-dire :*

Soit Γ un ensemble de clauses et C une clause. Si $\Gamma \vdash_{1fcb} C$ alors $\forall(\Gamma) \models \forall(C)$.

Propriété 1 *Soit C' un facteur de C, puisque C' est une instance de C, la fermeture universelle de C' est une conséquence de celle de C.*

Propriété 2 *Soient 2 clauses copies l'une de l'autre, puisque chacune des clauses est instance de l'autre, leurs fermetures universelles sont équivalentes.*

Propriété 3 *Soit E un résolvant binaire des clauses C et D : $\forall(C), \forall(D) \models \forall(E)$.*

□