

Examen INF452

Stéphane Devismes

Benjamin Wack

mai 2019

2 pages

Total : 120 points + 5 de bonus

Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

L'épreuve sera notée sur 120 points, les 5 points supplémentaires sont considérés comme du bonus.

Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formule du premier ordre et Expansions (25 points)).

Pour chacune des formules suivantes :

- $A = \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
- $B = \exists x (F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\forall x F(x) \Rightarrow \forall x G(x))$
- $C = \forall x \forall y (P(x, y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x P(x, x)$

1. Donnez la signature correspondante.
2. Déterminez un contre-modèle de la formule par la méthode des expansions.

□

Exercice 2 (Formalisation (25 points)).

La ville de Port-Réal est secouée par un mouvement social important, les « boucliers bleus ». Le roi Joffrey Baratheon propose des états généraux afin d'apaiser la situation. Tyrion Lannister, la main du roi, donne son sentiment sur ce mouvement :

1. « Jon et Arya sont des boucliers bleus, ils ne veulent pas du même chef. De plus, ni l'un ni l'autre ne veut de Robb comme chef. »
2. « Plusieurs boucliers bleus (au moins deux) veulent être chef. »
3. « Tous les boucliers bleus adhèrent aux mêmes idées que celui qu'ils veulent comme chef, sauf si celui-ci participe aux états généraux. »
4. « Jon est le seul bouclier bleu qui participera aux états généraux. »
5. « Quelque soit le bouclier bleu, on en trouve toujours un autre qui n'adhère pas aux mêmes idées que lui. »

À l'aide de la signature suivante, formaliser les affirmations de Tyrion Lannister.

- Arya, Jon et Robb sont trois constantes.
- $\text{Bleu}(x)$ signifie que x est un bouclier bleu.
- La fonction $\text{Favori}(x)$ renvoie le chef souhaité par x .
- La relation $\text{Adhere}(x, y)$ formalise le fait que x adhère aux mêmes idées que y .
- La relation $\text{Participe}(x)$ formalise le fait que x va participer aux états généraux.

□

Exercice 3 (Unification (15 points)).

Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes en donnant à chaque fois le nom des règles utilisées.

1. $\neg f(a, x, g(y, b)) = \neg f(a, z, g(b, z))$
2. $f(r(z), z, b) = f(x, g(y, a), y)$
3. $f(x, z, y) = f(y, r(x), g(a, r(z)))$

□

Exercice 4 (Skolémisation (10 points)).

Considérons le raisonnement dont les hypothèses sont :

$$H_1 = \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow R(x, y))$$

$$H_2 = \forall x \exists y (P(y) \vee R(x, y))$$

et dont la conclusion est :

$$C = \exists x \exists y R(x, y)$$

Montrez que ce raisonnement est correct par la méthode de Herbrand, en donnant les étapes suivantes :

1. Skolémiser puis mettre en forme clausale les hypothèses et la négation de la conclusion.
2. Proposer des instances contradictoires de ces clauses.

□

Exercice 5 (Résolution (15 points)).

Considérons l'ensemble suivant de clauses du premier ordre :

$$\Gamma = \{P(z) \vee Q(b, a) \vee \neg R(x), P(f(a)) \vee \neg Q(x, y), \neg P(x) \vee \neg P(f(y)), Q(f(a), a) \vee R(z)\}$$

Nous voulons montrer que cet ensemble de clauses est insatisfaisable par instanciation et par résolution.

1. Trouvez des instances contradictoires de ces clauses et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.
2. Donnez une preuve directe du caractère contradictoire de Γ par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.

□

Exercice 6 (Dédution naturelle (20 points)).

Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les formules et on indiquera pour chaque ligne le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge R(x))$
2. $\forall x (f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

□

Exercice 7 (Démonstration par récurrence (15 points, exercice du poly)).

Montrer que toute formule **propositionnelle** construite avec une seule variable x , uniquement \vee et \wedge et sans négation est équivalente à une formule de taille 0.

□