Examen INF452

Stéphane Devismes   Benjamin Wack

mai 2018
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points. Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formule du premier ordre et Expansions (20 points))**.**
Nous considérons la formule $A = \forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y)) \wedge \forall x \forall y(R(x) \wedge R(y) \Rightarrow x = y)$.

1. *Donnez la représentation en arbre de A.*
2. *Donnez la signature de A.*
3. *Calculez la 1-expansion de A et déduisez pour un domaine à une valeur, un modèle et un contre-modèle de A.*
4. *Calculez la 2-expansion de A et déduisez pour un domaine à deux valeurs, un modèle et un contre-modèle de A.*

□

Exercice 2 (Formalisation (20 points))**.**
Pour cet exercice, vous allez considérer les éléments suivants :
— *deux constantes : Tyrion et Daenerys,*
— *la relation* $Famille(x, y)$ *qui formalise le fait que* x *et* y *soient de la même famille,*
— *la relation* $Roi(x)$ *qui formalise le fait que* x *soit un roi,*
— *la fonction* $Pere(x)$ *: le père du personnage* x *et*
— *la relation* $Assassine(x, y)$ *qui formalise le fait que* x *assassine* y.
Formalisez les énoncés suivants :

1. *« Un personnage a assassiné un membre de sa famille »,*
2. *« Un personnage ne peut être roi que si son père l'était et qu'il a été assassiné »,*
3. *« Tous les personnages se font assassiner, sauf Tyrion »,*
4. *« Certains personnages se font assassiner par plusieurs personnes différentes », et*
5. *« Daenerys n'assassine personne, sauf le père d'un roi qui n'est pas de sa famille ».*

□

Exercice 3 (Unification (20 points), exercices du polycopié)**.**
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes en donnant à chaque fois le nom des règles utilisées.

1. $pair(crypt(x, b), crypt(y, b))$ *et* $pair(crypt(a, b), z)$.
2. $crypt(pair(z, a), x)$ *et* $crypt(pair(y, crypt(x, b)), b)$.
3. $f(x, y, g(a, a))$ *et* $f(g(y, y), z, z)$
4. $f(x, y, a)$ *et* $f(y, g(z, z), x)$

□

Exercice 4 (Skolémisation (10 points)).
Considérons les formules suivantes :

1. $H = \forall x \forall y (\forall z (M(z,x) \Rightarrow M(z,y)) \Leftrightarrow S(x,y))$
2. $C = \forall x \forall y \forall z (S(x,y) \wedge S(y,z) \Rightarrow S(x,z))$

Skolémiser puis mettre en forme clausale l'ensemble des formules H *et* $\neg C$. □

Exercice 5 (Résolution (10 points)).
Considérons l'ensemble suivant de clauses du premier ordre :

$$\Gamma = \{\overline{C(x,y)} + \overline{E(z,x)} + E(z,y),\ C(c,a),\ C(a,b),\ \overline{C(c,b)},\ C(x,y) + E(h(x,y),x),\ C(x,y) + \overline{E(h(x,y),y)}\}$$

Nous voulons montrer que cet ensemble de clauses est insatisfaisable par instanciation et par résolution.

1. *Trouvez des instances contradictoires de ces clauses et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
2. *Donnez une preuve directe du caractère contradictoire de* Γ *par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

□

Exercice 6 (Déduction naturelle (20 points)).
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les formules et on indiquera pour chaque ligne le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\forall x \neg (P(x) \vee R(x)) \Rightarrow \exists x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$
2. $\forall x \forall y (\exists z (x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y))$
3. $\forall x (P(x) \vee R(x)) \wedge \exists x \neg P(x) \Rightarrow \exists x R(x)$

□

Exercice 7 (Démonstration par récurrence (20 points)).
Nous considérons $n+1$ *variables booléennes notées* $A_1, ..., A_n$ *et* B *avec* $n > 0$. *Démontrez, par récurrence, que*

$$\neg(A_n \Rightarrow A_{n-1} ... \Rightarrow A_1 \Rightarrow \neg B)$$

est équivalent à

$$A_n \wedge A_{n-1} ... \wedge A_1 \wedge B$$

□