Examen INF452

Stéphane Devismes Benjamin Wack

17 mai 2017
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points. Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (20 points)).
Pour cet exercice, vous allez considérer les éléments suivants :
- *deux constantes : $Fricotin$ et $Petula$,*
- *la relation $Depute(x)$ qui formalise le fait que x soit un député,*
- *la relation $Assistant(x, y)$ qui formalise le fait que x soit l'assistant(e) parlementaire de y,*
- *la fonction $Principal(x)$: l'assistant(e) parlementaire principal(e) de x et*
- *la relation $Famille(x, y)$ qui formalise le fait que x et y soient de la même famille.*

(a) Donnez la définition formelle de la signature associée à l'ensemble de ces éléments, en utilisant les notations vues en cours.

Formalisez les énoncés suivants :

(b) « Fricotin est député et a pour assistante principale, Pétula, qui est de sa famille »,
(c) « Il y a des députés (au moins un) qui n'ont aucun membre de leur famille comme assistant »,
(d) « Fricotin n'est pas le seul député qui a pour assistant quelqu'un de sa famille », et
(e) « Pétula est l'assistante principale d'un autre député (c'est-à-dire autre que Fricotin) ».

□

Exercice 2 (Démonstration par récurrence (20 points)).
On s'intéresse aux formules de logique du premier ordre qui :
- *ne comportent que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$ et les quantificateurs $\forall$ et $\exists$;*
- *et telles que chaque variable apparaît au maximum dans **une** de leurs formules atomiques.*

Démontrer que toute formule F de ce type est équivalente à une formule F' telle que tous les quantificateurs de F' portent sur des formules atomiques.

On pourra utiliser la notion de taille suivante pour une formule du premier ordre :

Définition (Taille d'une formule du premier ordre).
La taille d'une formule *A, notée $|A|$, est définie inductivement par :*
- $|\top| = 0$ *et* $|\bot| = 0$.
- *Si A est une formule atomique alors $|A| = 0$.*
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|Qx\ A| = 1 + |A|$ *si Q est un des quantificateurs $\forall$ ou $\exists$.*
- $|(A \circ B)| = |A| + |B| + 1$ *si $\circ$ est un des connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.*

□

Exercice 3 (Déduction naturelle (25 points, exercices du polycopié)).
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les formules et on indiquera pour chaque ligne le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$
3. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$
4. $\exists x \forall y\ x = y \Rightarrow \forall x \forall y\ x = y$

□

Exercice 4 (Skolémisation et résolution (15 points)).
Considérons les formules suivantes :

1. $H_1 = \forall x R(f(f(x)), x)$
2. $H_2 = \forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
3. $C = \forall x \exists y R(x, f(y))$

Nous voulons montrer que C est conséquence de H_1 et H_2 par instanciation et par résolution.

1. *Mettre en forme clausale l'ensemble des quatre formules H_1, H_2, $\neg C$.*
2. *Trouvez des instances contradictoires des clauses obtenues et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
3. *Donnez une preuve directe du caractère contradictoire de $H_1, H_2, \neg C$ par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

□

Exercice 5 (Expansions (20 points)).
Trouvez, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :

1. $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x P(x, x)$
2. $\forall x \forall y(x \neq y \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow \neg P(y)))$
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(x, y) \wedge \neg P(x) \Rightarrow \exists y Q(y, x)) \Rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$

Indication *: vous pouvez vous contenter de construire des 1-expansions ou des 2-expansions.*

□

Exercice 6 (Unification (20 points)).
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes en donnant à chaque fois le nom des règles utilisées.

1. $R(a, f(x)) = R(y, f(g(y, b)))$,
2. $R(y, f(x)) = R(x, f(g(y, b)))$,
3. $Q(y, f(a), f(x)) = Q(g(a, b), x, f(y))$, *et*
4. $Q(y, f(x), g(y, x)) = Q(x, f(y), g(f(a), y))$.

□