Examen INF242

Stéphane Devismes Benjamin Wack

17 mai 2016
2 pages
Total : 130 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 130 points, les 10 points supplémentaires sont considérés comme du bonus pour compenser la longueur du sujet.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (25 points))
Afin d'assurer que le prochain film de la franchise Jurassic Park *sera à la fois scientifiquement correct et commercialement réussi, on fait appel à vos talents en logique formelle.*

Vous utiliserez la signature suivante :

— $V(x)$ *est vrai si* x *est un visiteur*
— $D(x)$ *est vrai si* x *est un dinosaure*
— $P(x)$ *est vrai si* x *a peur*
— $M(x, y)$ *est vrai si* x *mange* y

Traduisez en formules de logique du premier ordre les affirmations suivantes :

1. *Il y aura des dinosaures et des visiteurs, mais aucun dinosaure visiteur.*
2. *Si un dinosaure mange un visiteur, tous les* autres *visiteurs auront peur.*
3. *Tous les dinosaures ne sont pas des mangeurs de visiteurs.*
4. *Les personnages qui n'ont pas peur sont des dinosaures et des visiteurs qui n'ont rien mangé.*
5. *Aucun dinosaure ne partage son repas avec qui que ce soit.*

□

Exercice 2 (Récurrence, exercice du poly, 15 points)
Montrer que toute formule ***propositionnelle*** *construite uniquement avec :*

— *la variable* p
— *les connecteurs* $\vee$ *et* $\wedge$
— *(et donc en particulier sans négation)*

est équivalente à une formule de taille 0.

Indication : *le cas inductif comporte 18 sous-cas ; vous pourrez vous contenter d'en traiter un sous-ensemble représentatif et d'expliquer rapidement en quoi votre raisonnement se généralise aux autres cas.*

□

Exercice 3 (Déduction naturelle (35 points))
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre :

1. $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \neg\forall x P(x)$
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)))$
3. $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$

□

Exercice 4 (Skolémisation et résolution (15 points))
Considérons les formules suivantes :

1. $H_1 = \forall x \exists y R(x, y)$
2. $H_2 = \forall x \forall y(S(x, y) \Leftrightarrow R(x, y) \vee R(y, x))$
3. $C = \forall x \exists y S(y, x)$

Nous voulons montrer que C est conséquence de H_1 et H_2 par instanciation et par résolution.

1. *Mettre en forme clausale l'ensemble des trois formules H_1, H_2, $\neg C$.*
2. Facultatif : *Trouvez des instances contradictoires des clauses obtenues et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
3. Obligatoire : *Donnez une preuve directe de cette contradiction par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

□

Exercice 5 (Expansions (20 points))
Trouvez, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :

1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
2. $\exists x \forall y(R(x, y) \vee x = y)$
3. $\forall x \exists y(P(x, y) \Rightarrow P(a, f(y)))$
4. $\exists x \exists y(P(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \forall x \forall y P(x, y)$

Indication *: vous pouvez vous contenter de construire des 2-expansions.*

□

Exercice 6 (Unification (20 points))
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes.

1. $f(h(x), y, k(x, y)) = f(y, h(z), k(a, h(a)))$
2. $f(g(x), k(a, y), x) = f(g(x), k(z, g(x)), y)$
3. $f(x, a, k(y, g(y))) = f(g(z), y, k(y, h(z)))$
4. $f(x, a, k(y, g(y))) = f(g(z), y, k(z, g(z)))$

□