Examen INF242

Stéphane Devismes Benjamin Wack

21 mai 2015
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (20 points))
On souhaite décrire des relations de généalogie en logique du premier ordre. Pour cela, on dispose des relations :
- `parent(x,y)` *qui est vrai si x est le père ou la mère de y,*
- `homme(x)` *qui est vrai si x est un homme, et enfin,*
- `femme(x)` *qui est vrai si x est une femme.*

À l'aide des relations précédentes, définissez les prédicats suivants :
1. `mere(x,y)` *qui est vrai si x est la mère de y,*
2. `gdparent(x,y)` *qui est vrai si x est un grand-parent de y.*
3. `oncle(x,y)` *qui est vrai si x est un oncle de y, c'est-à-dire, x est un homme qui n'est pas parent de y mais a un parent commun avec l'un des parents de y.*

Soit I l'interprétation suivante de domaine $D = \{0, 1, 2, 3\}$ *:*
- $\texttt{Paul}_I = 0$
- $\texttt{Pierre}_I = 1$
- $\texttt{Nathalie}_I = 2$
- $\texttt{Sandrine}_I = 3$
- $\texttt{homme}_I = \{0, 1\}$
- $\texttt{femme}_I = \{2, 3\}$
- $\texttt{parent}_I\ \{(0, 1), (0, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

4. *Soit* $\texttt{fils(x,y)} = \texttt{homme(x)} \wedge \texttt{parent(y,x)}$. *Evaluez* $[\texttt{fils}(\texttt{Pierre}, \texttt{Paul})]_I$.
5. *Evaluez* $[\exists \texttt{x}\ (\texttt{fils}(\texttt{x}, \texttt{Paul}) \wedge \forall \texttt{y}\ (\texttt{fils}(\texttt{y}, \texttt{Paul}) \Rightarrow x = y))]_I$. *Que concluez-vous ?*
6. *Formalisez l'énoncé suivant ≪ chaque enfant d'un oncle d'une personne a un grand-parent en commun avec cette personne ≫.*

□

Exercice 2 (Unification (20 points))
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes.
1. $f(b, y, g(a, x)) = f(x, g(b, a), y)$
2. $g(x, b) = g(f(a, y, a), y)$
3. $g(f(a, h(y), z), x) = g(x, f(a, z, y))$

□

Exercice 3 (Démonstration par récurrence (20 points))

Définition : Une formule F est sous forme prénexe *si elle est de la forme $Q_1x_1 \ \ldots Q_nx_n \ G$ où G est une formule sans quantificateur et chacun des Q_i est un quantificateur (soit $\forall$ soit $\exists$).*

On appelle $Q_1x_1 \ \ldots Q_nx_n$ le préfixe de F. Le préfixe peut être vide.

1. *Montrez que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\neg$, $\vee$, et le quantificateur $\exists$.*
2. *Montrez que toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe.*
   (Rappel : $(\forall x A) \vee B \equiv \forall x(A \vee B)$ si x n'est pas libre dans B).

□

Exercice 4 (Déduction naturelle (15 points))

Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre :

1. $\forall x \forall y(\exists z(x = z \wedge z = y) \Rightarrow (x = y))$
2. $\exists z \forall x P(z, x) \Rightarrow \forall x \exists z P(z, x)$

□

Exercice 5 (Skolémisation et résolution, exercice du poly (25 points))

Considérons les formules suivantes :

1. $H_1 = \exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$.
2. $H_2 = \forall x(P(x) \vee Q(x))$.
3. $C = \exists x \neg Q(x) \Rightarrow \forall x P(x)$.

Nous voulons montrer que C est conséquence de H_1 et H_2 par instanciation et par résolution.

1. *Mettre en forme clausale l'ensemble des trois formules H_1, H_2, $\neg C$.*
2. *Trouvez des instances contradictoires des clauses obtenues et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
3. *Donnez une preuve directe de cette contradiction par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que seule la dernière règle soit utilisée.*

□

Exercice 6 (Expansions (20 points))

Trouvez, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :

1. $\exists x \ \forall y \ R(x, y) \Rightarrow \forall x \ R(x, x)$
2. $\forall x \ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x \ Q(x) \Rightarrow \exists x \ P(x)$
3. $\forall x \ \forall y \ (P(x) \vee \neg P(y) \Rightarrow R(x, y)) \Rightarrow \forall x \ \forall y \ R(x, y)$

Indication *: il suffit de construire des 1 ou 2 expansions.* □