Stabilité des systèmes

Un sujet très important, une propriété globale

– Stabilité

– Systèmes rationnels

– Stabilisation par feed-back

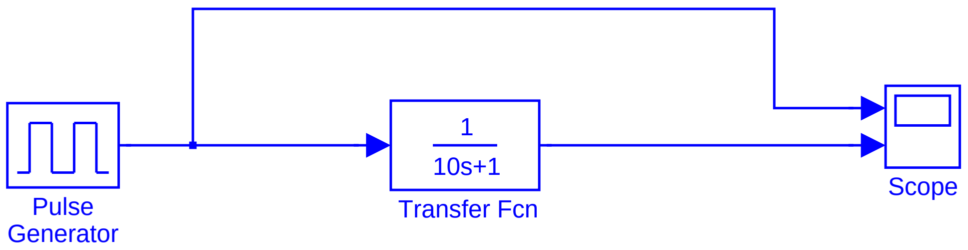
– Placement de pôles

– Théorie de Lyapunov

Stabilité

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

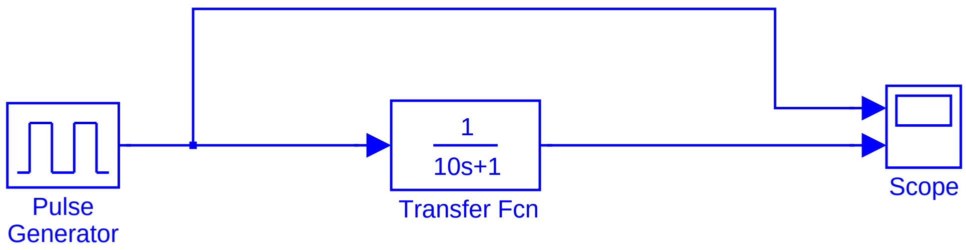
Exemple : Un système stable

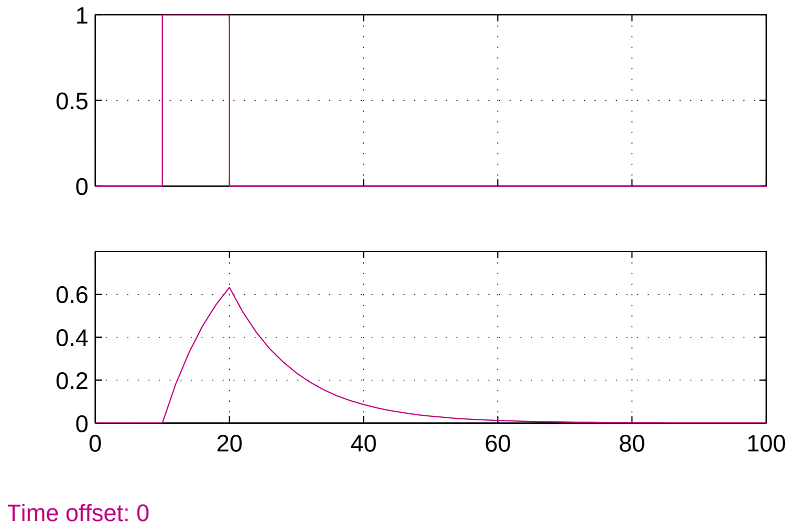


Stabilité

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système stable

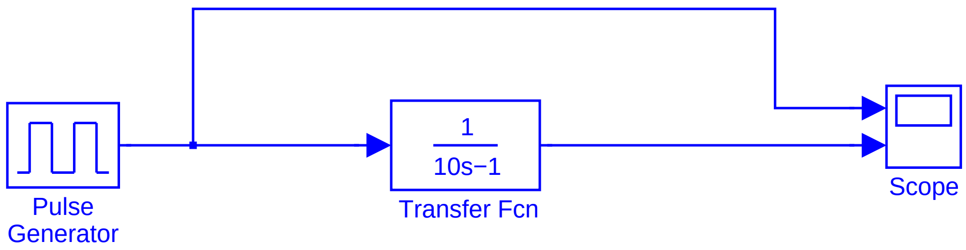




Stabilité

Un système déplacé d'un point d'équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système instable

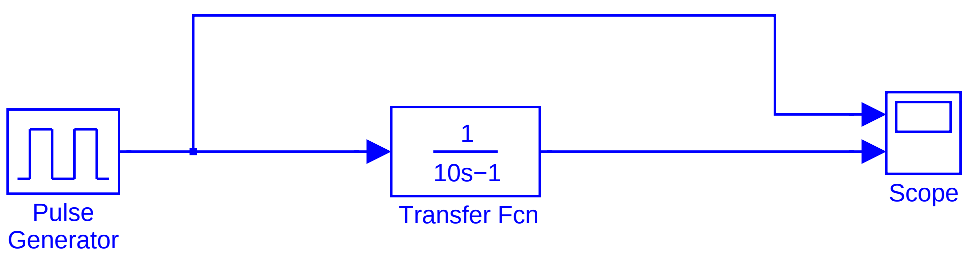


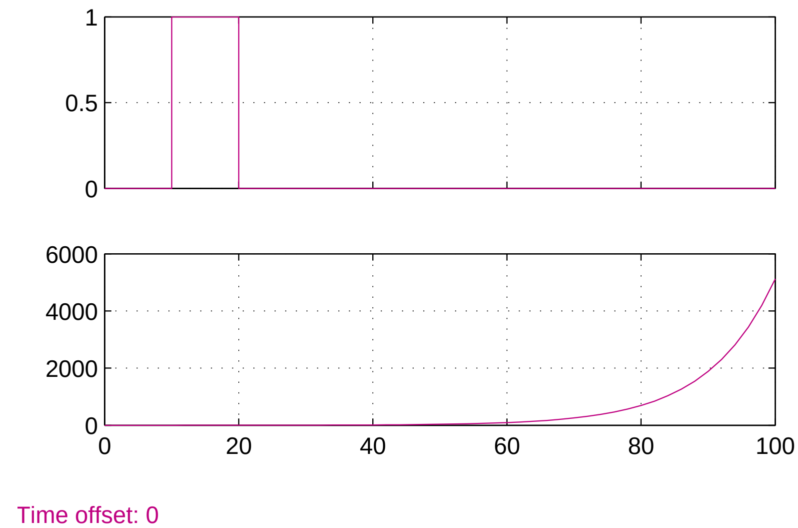
Stabilité

plan rat

Un système déplacé d’un point d’équilibre reconverge-t-il vers celui-ci ou diverge-t-il ?

Exemple : Un système instable





Pourquoi ?

Systèmes rationnels

Il suffit de regarder les pôles (racines du dénominateur) de la fonction de transfert dans le plan complexe :

Si les pôles sont tous à partie réelle négative le système est dit asymptotiquement stable

en effet la réponse impulsionnelle sera une somme de termes de type

$$kt^n e^{\lambda t}$$

avec λ à partie réelle négative. Tous ces termes tendent vers 0 quand t tend vers l'infini.

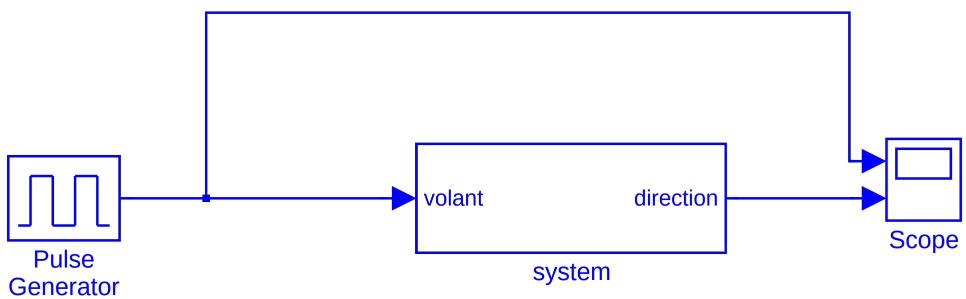
Exemple : $\dfrac{1}{10s+1}$

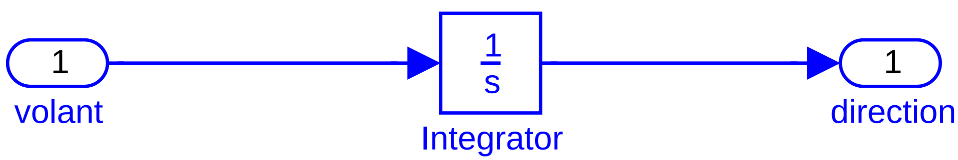
il y a un seul pôle de valeur $-\dfrac{1}{10}$ réelle négative : le système est asymptotiquement stable

Stabilisation par feed-back

Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ? - Non - Pourquoi ?

- Parce le volant est un intégrateur :





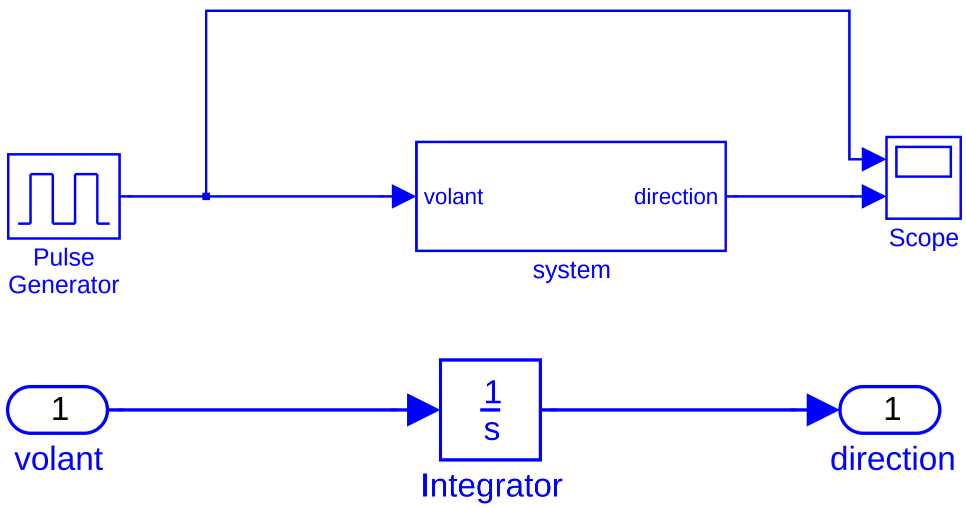
Stabilisation par feed-back

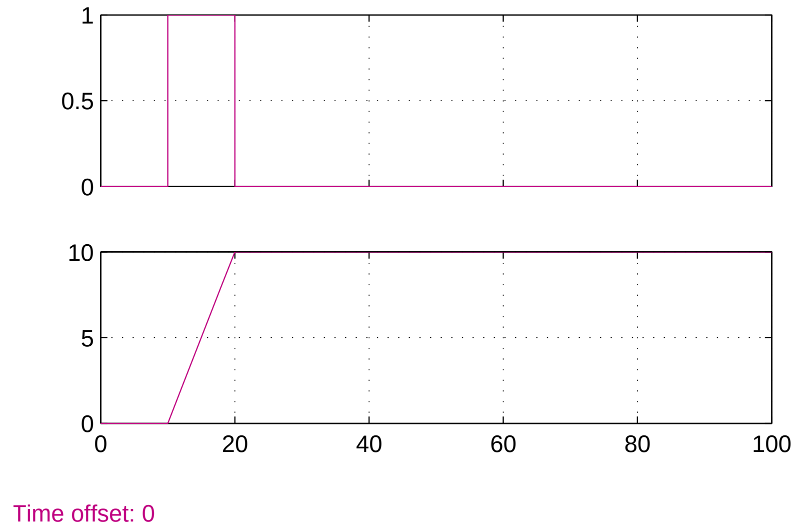
Question : peut-on conduire sa voiture en ligne droite les yeux fermés ?

- Non

- Pourquoi ?

- Parce le volant est un intégrateur :



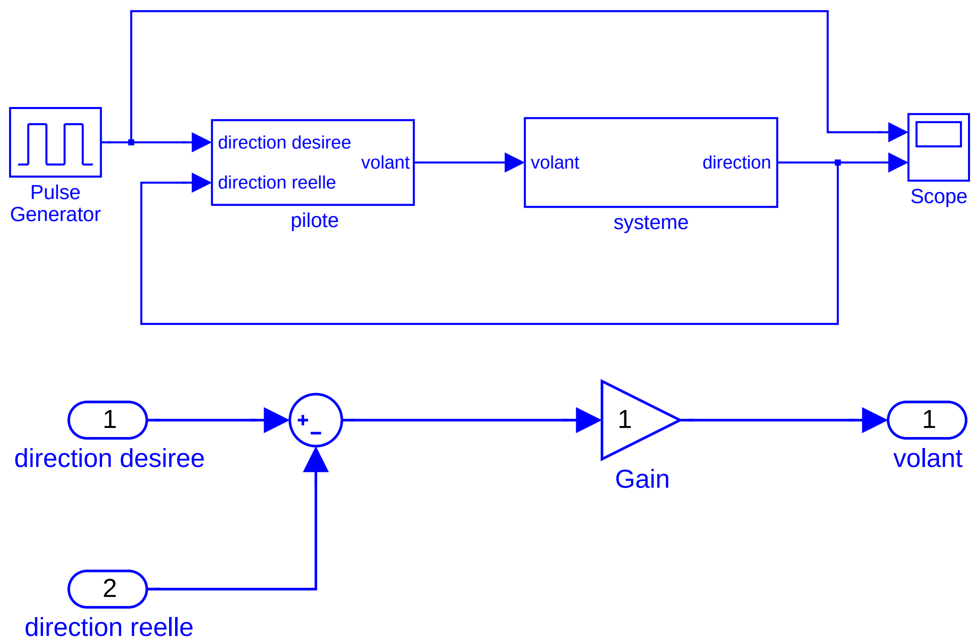


Le pôle vaut 0 et n'est pas à partie réelle négative

Stabilisation par feed-back

Solution :

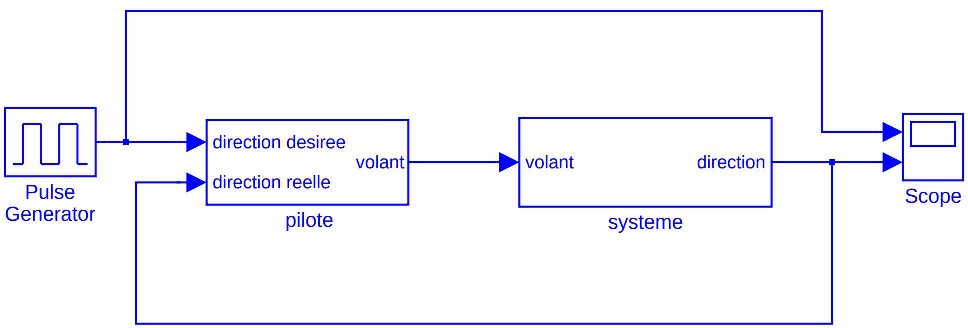
Conduire les yeux ouverts

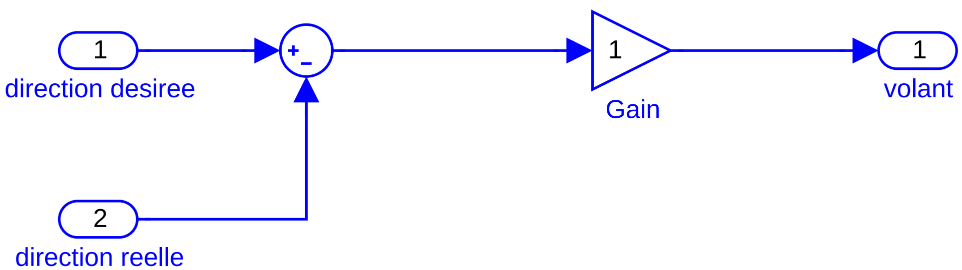


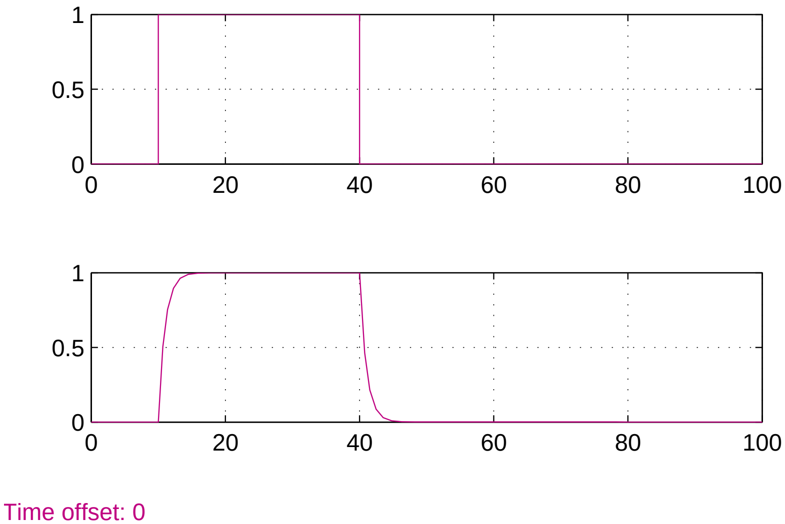
Stabilisation par feed-back

Solution :

Conduire les yeux ouverts







Pourquoi et comment ?

Stabilisation par feed-back

Pourquoi et comment ?

Idée : calculer la fonction de transfert en boucle fermée

$E = DD - DR$

$V = E$

$$DR(s) = \frac{1}{s}V(s)$$

$$DR(s) = \frac{1}{s}V(s) = \frac{1}{s}(DD(s) - DR(s))$$

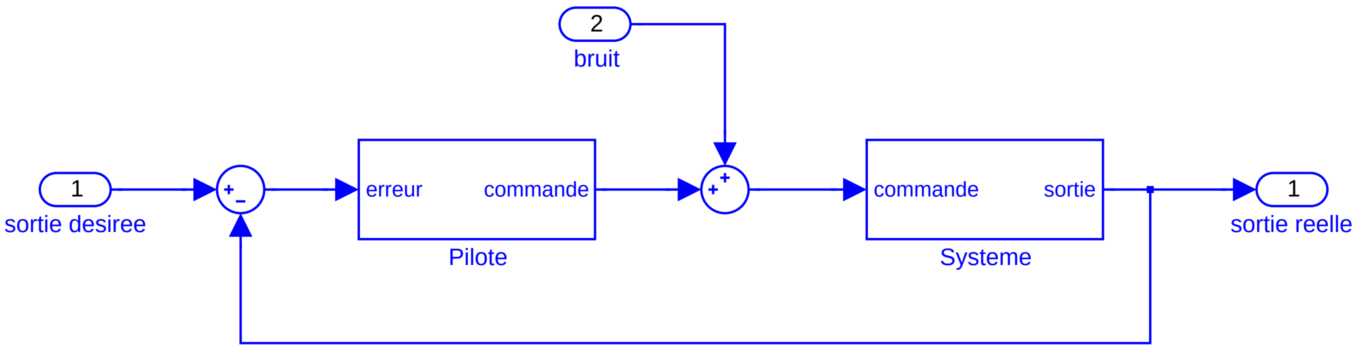
$$(1 + \frac{1}{s})DR(s) = \frac{1}{s}DD(s)$$

$$DR(s) = \frac{1}{s+1}DD(s)$$

Le pôle vaut -1 et est à partie réelle négative : le système piloté est stable

Généralisation

Généralisons le schéma précédent :

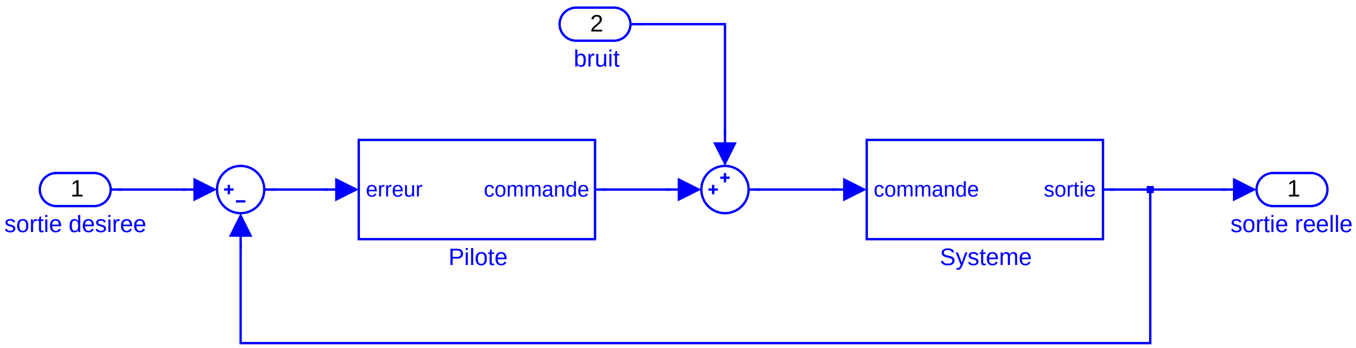


où

- le bruit (b) représente les perturbations et les erreurs de modélisation
- le pilote et le système sont supposés rationnels ($P(s), S(s)$)

Généralisation

Généralisons le schéma précédent :



Calculons symboliquement le système :

$$Sr = S(P(Sd - Sr) + B)$$

$$(1 + SP)Sr = S(PSd + B)$$

$$\boxed{Sr = \frac{SP}{1+SP}Sd + \frac{S}{1+SP}B}$$

Problème de la commande automatique

$$\boxed{Sr = \frac{SP}{1+SP} Sd + \frac{S}{1+SP} B}$$

étant donné S, trouver P tel que

1. $\dfrac{SP}{1+SP}$ soit stable et proche de l'identité

   fidélité

2. $\dfrac{S}{1+SP}$ soit petit

   robustesse (rejet des perturbations)

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote (proportionnel) $P = a$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1+SP}$

$D = s^2 + a$

C'est un polynôme du 2ème degré : les racines sont imaginaires pures

pas stable ! ! !

Exemple : commande PID

On considère le système $S = \dfrac{1}{s^2}$

(double intégrateur : on intègre la direction de la voiture pour avoir sa position dans l'espace)

Le pilote (proportionnel, différentiel)$P = \dfrac{as + b}{cs + d}$

On calcule le dénominateur de $\dfrac{SP}{1 + SP}$

$D = s^2(cs + d) + as + b = cs^3 + ds^2 + as + b$

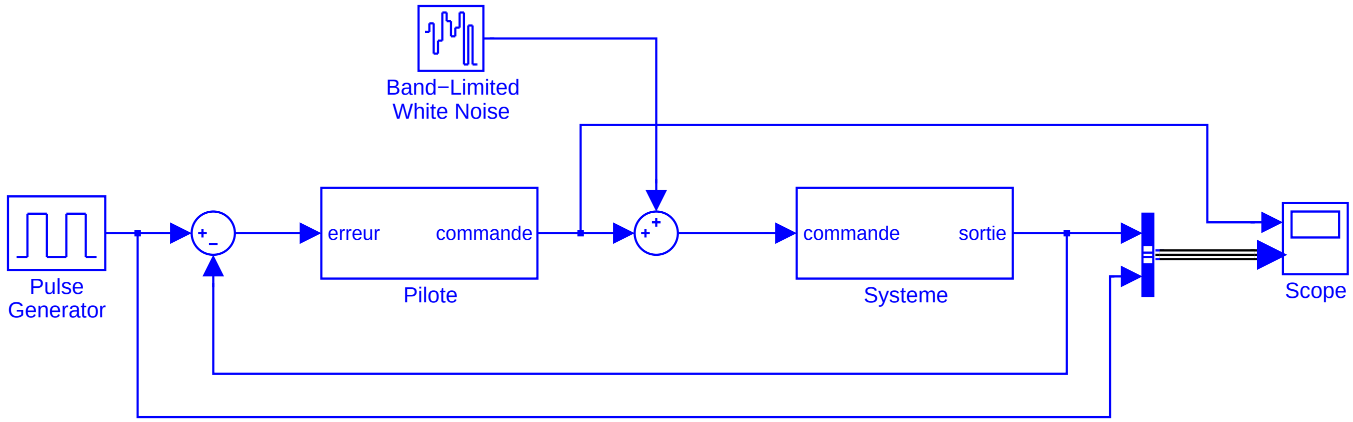
C'est un polynôme du 3ème degré : il y a trois racines que l'on peut choisir librement

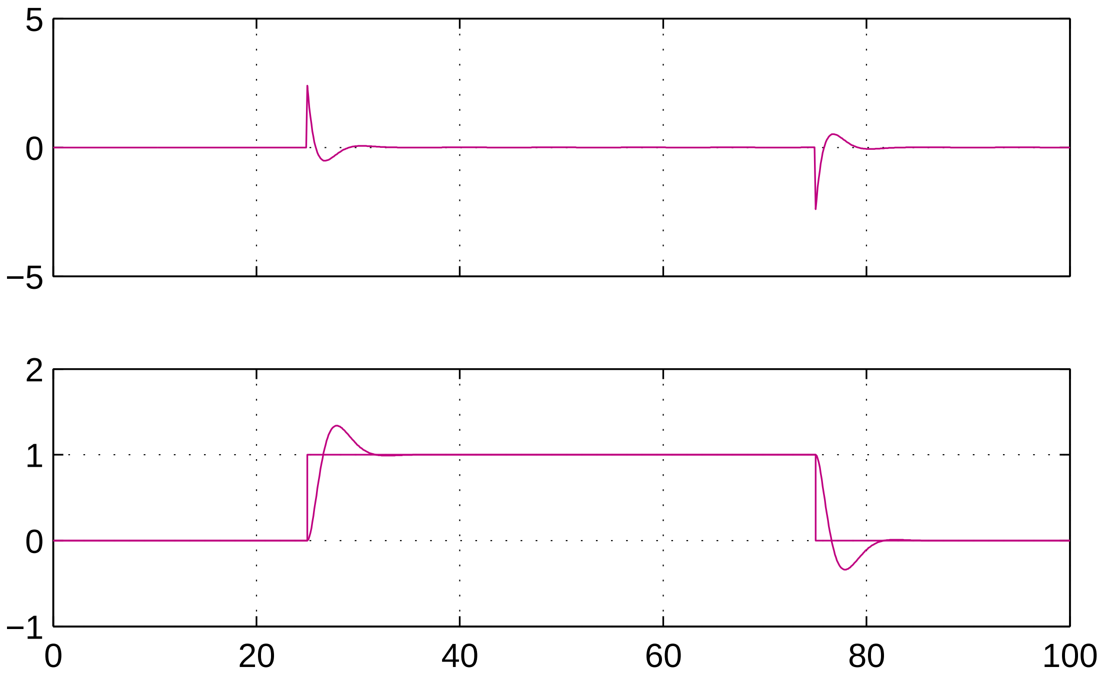
On choisit des racines stables :
$(s + 1)(s - e^{\frac{3i\pi}{4}})(s - e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1) = s^3 + 2.4s^2 + 2.4s + 1$

On identifie : $c = 1, d = 2.4, a = 2.4, b = 1$

on essaie

Simulation

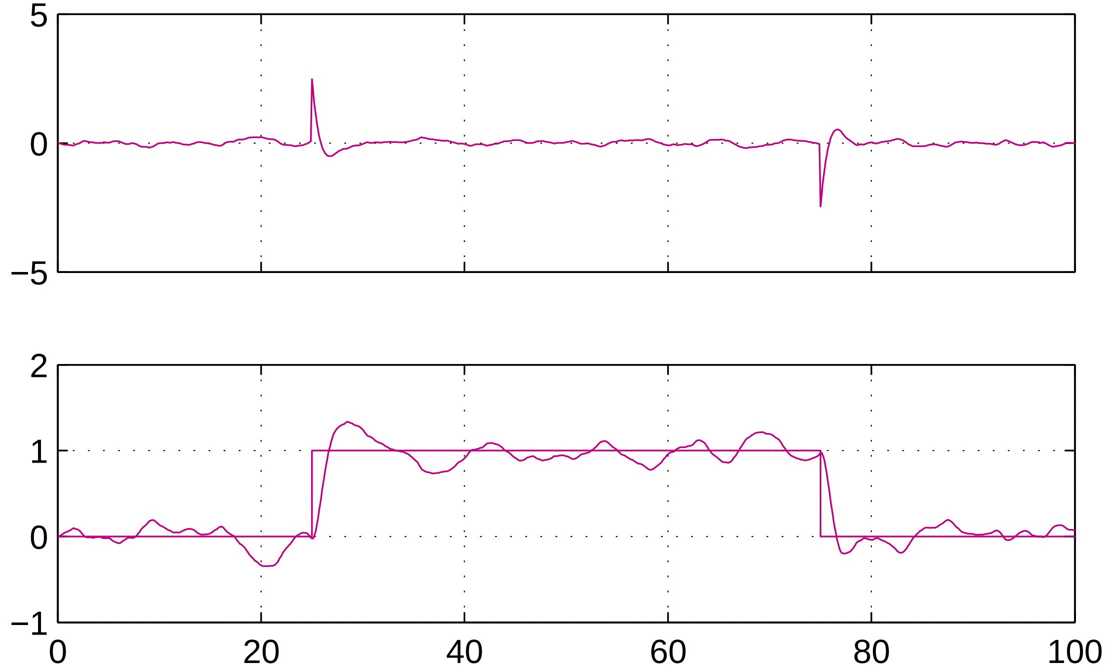




Time offset: 0

Simulation

Avec perturbation



Time offset: 0

Pas terrible

Rejet de perturbations

On calcule $\dfrac{S}{1+SP} = \dfrac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b}$

On calcule le Gain : valeur à l'infini obtenue à partir d'un échelon unité.

Théorème de la valeur finale

$$G = lim_{s\to 0} s(\frac{S}{1+SP}\frac{1}{s})$$

$$G = lim_{s\to 0} \frac{cs+d}{cs^3+ds^2+as+b} = \frac{d}{b}$$

Idée : diminuer $\dfrac{d}{b}$

On choisit des racines stables :

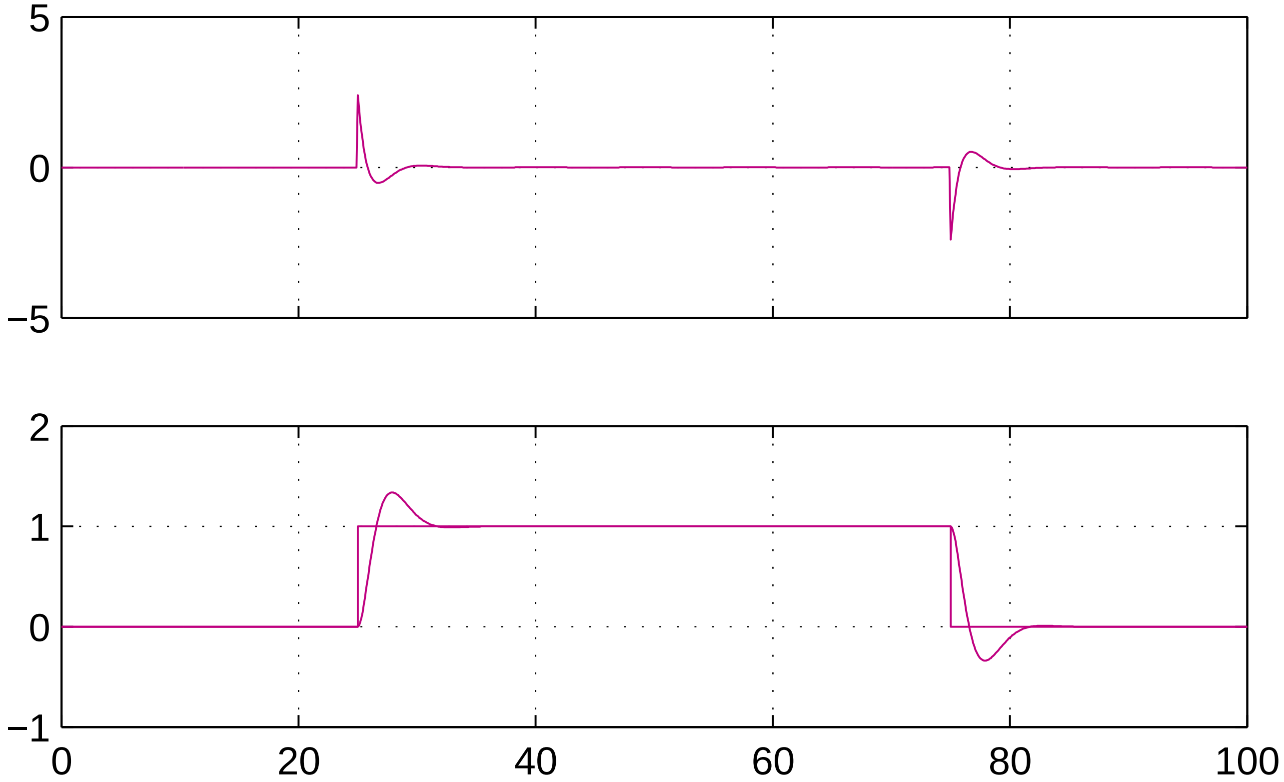
$$(s+1)(s-2e^{\frac{3i\pi}{4}})(s-2e^{\frac{5i\pi}{4}}) = (s+1)(s^2+2\sqrt{2}s+4) = s^3+3.8s^2+6.8s+4$$

On identifie : $c=1, d=3.8, a=6.8, b=4$

on essaie

Sans perturbation

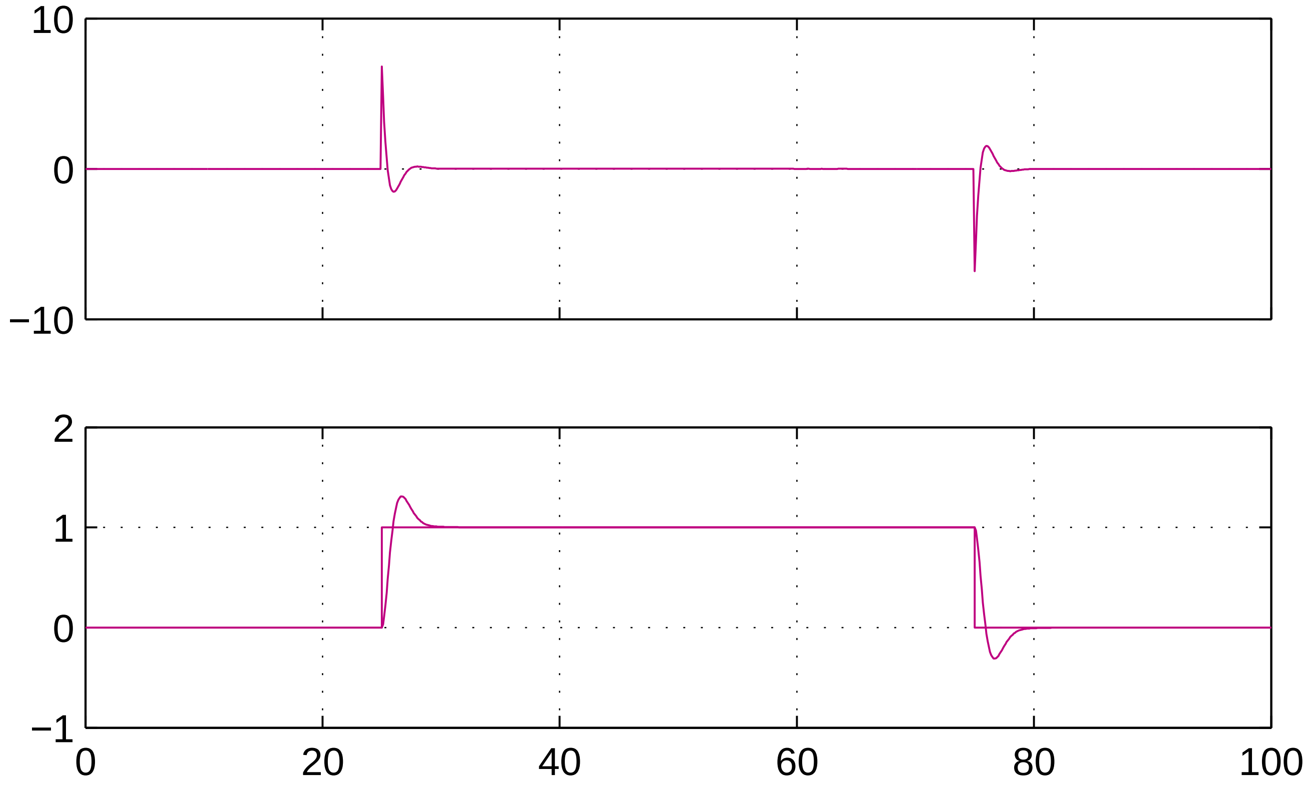
Avant



Time offset: 0

Sans perturbation

Après

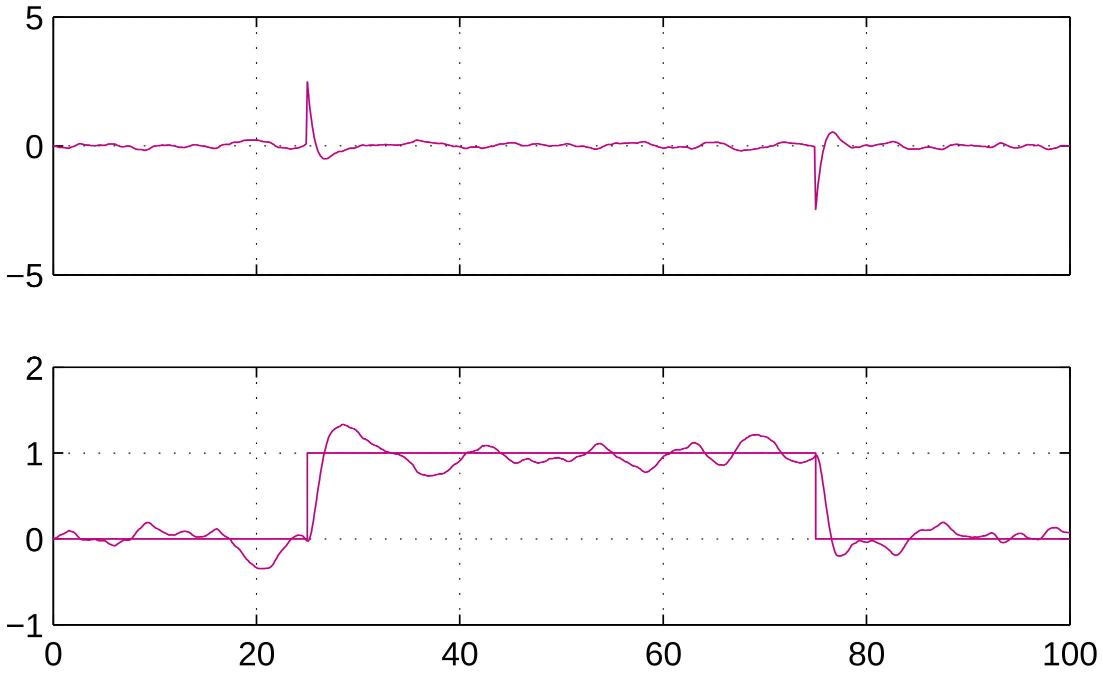


Time offset: 0

Pareil

Avec perturbation

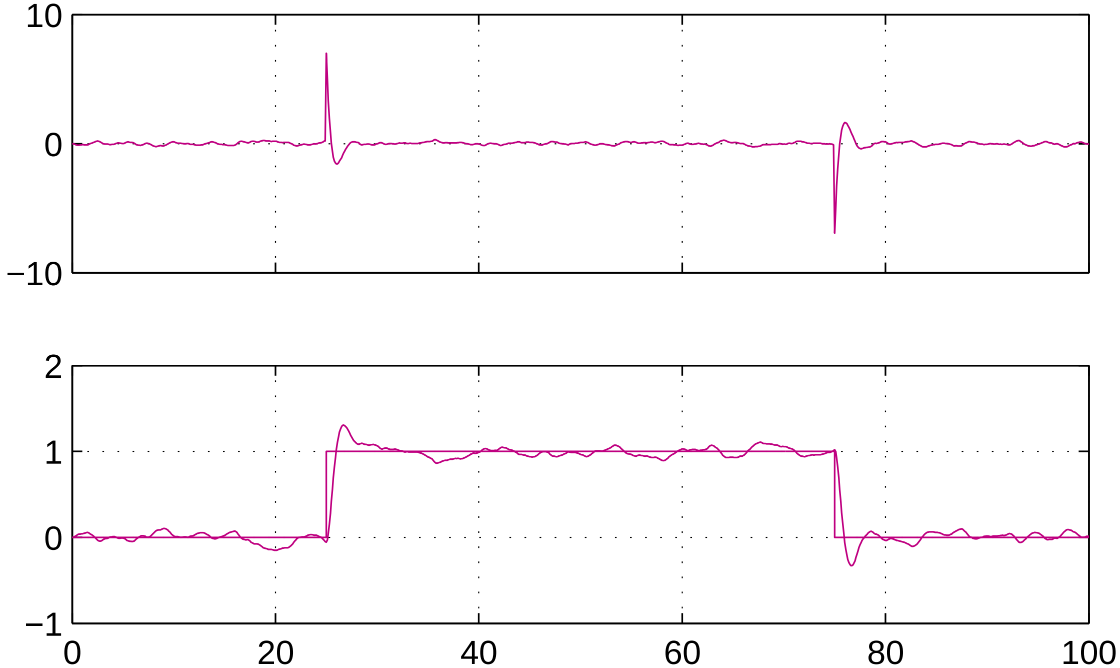
Avant



Time offset: 0

Avec perturbation

Après



Time offset: 0

Meilleur

On est content

Conclusion

La stabilité est une propriété globale, non préservée par composition :

exemple :

	système	instable
+	pilote	stable
	système composé	stable

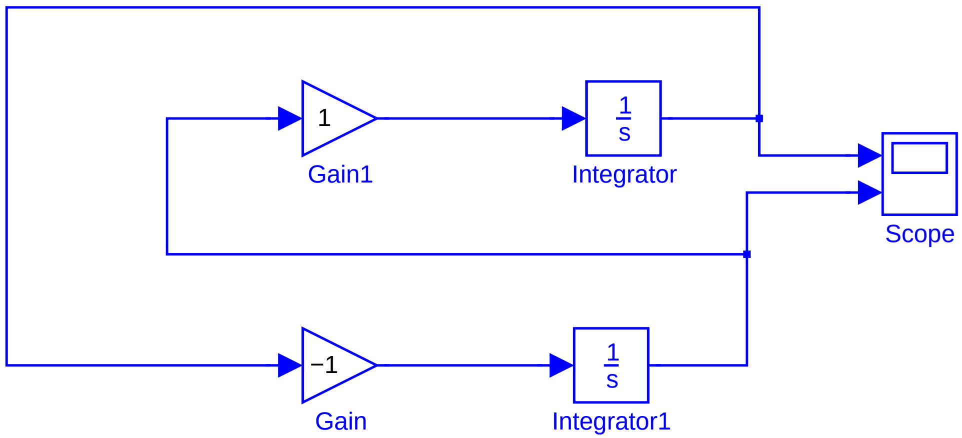
Tous les cas de figure sont possibles

Il faut faire attention

Sinus et cosinus

$$x' = y$$

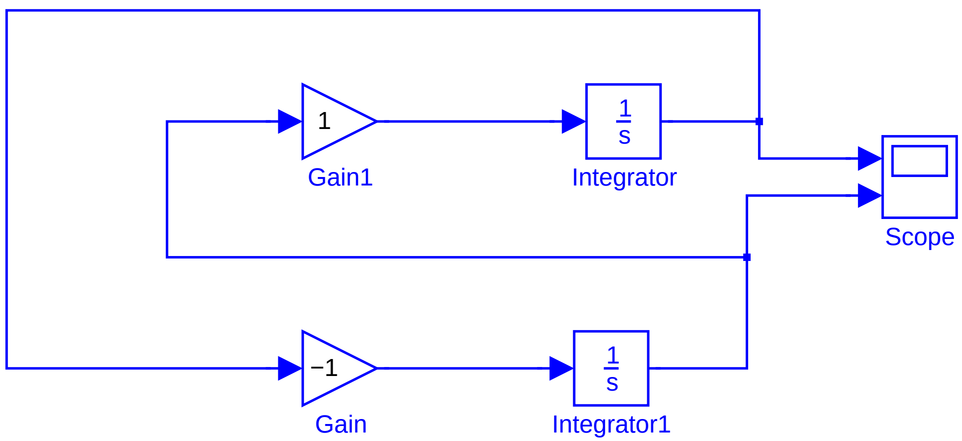
$$y' = -x$$

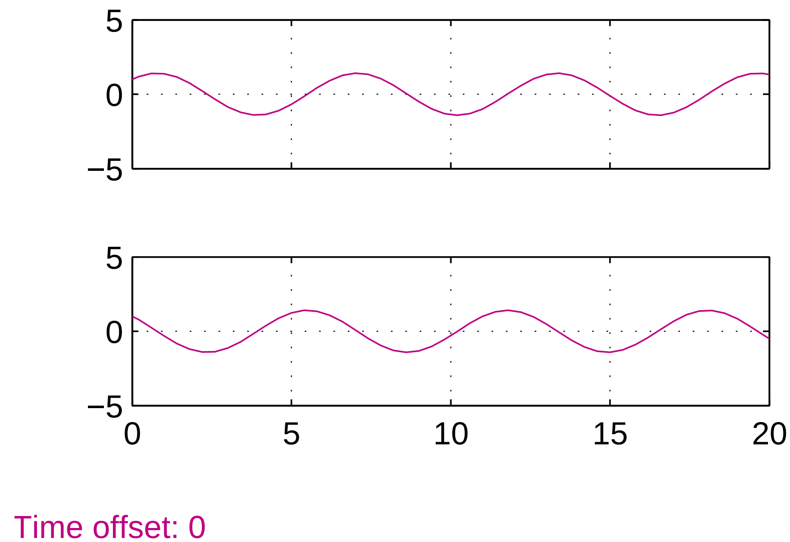


Sinus et cosinus

$x' = y$

$y' = -x$





Phénomème oscillatoire, intermédiaire entre stable et instable

Peut être étudié par la méthode de Lyapunov

Méthode de Lyapunov

Apparentée à la méthode d'étude de la terminaison de programme en informatique :

Comment démontrer qu'une boucle `while(c) I;` termine ?

Trouver une fonction entière `t` de la mémoire du programe, telle que :

1. il existe un entier `k` avec

   `{t < k} => {not c}`

2. `t` décroît au cours de la boucle :

   `[I] {t = n} => {t > n}`

(*où* `[I] {t = n}` *est la plus faible pré-condition du prédicat* `{t = n}` *par le programme* `[I]`)

Méthode de Lyapunov

Pour montrer que le système

$$S : X' = F(X)$$

est stable, trouver une fonction d'« énergie » E telle que

1. il existe un minimum e : $\forall X : E(X) > e$
2. E décroît strictement le long des trajectoires de S : $\forall X : \dfrac{\partial E}{\partial X}(X).F(X) < 0$

Pour un cycle limite :

E décroît le long des trajectoires de S : $\forall X : \dfrac{\partial E}{\partial X}(X).F(X) \leq 0$

(S ne peut pas s'échapper d'une portion d'espace délimitée par une courbe $E(X) = Cste$)

Méthode de Lyapunov : exemple

sinus et cosinus :

$x' = y$

$y' = -x$

$E(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$

Condition de Lyapunov :

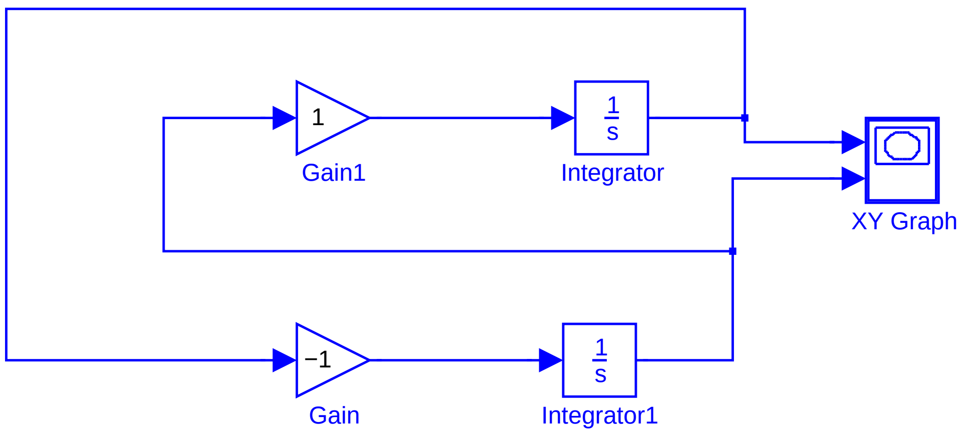
$$\frac{\partial E}{\partial x}x' + \frac{\partial E}{\partial y}y' \leq 0$$

$2xy - 2yx \leq 0$

Sinus et cosinus

$$x' = y$$

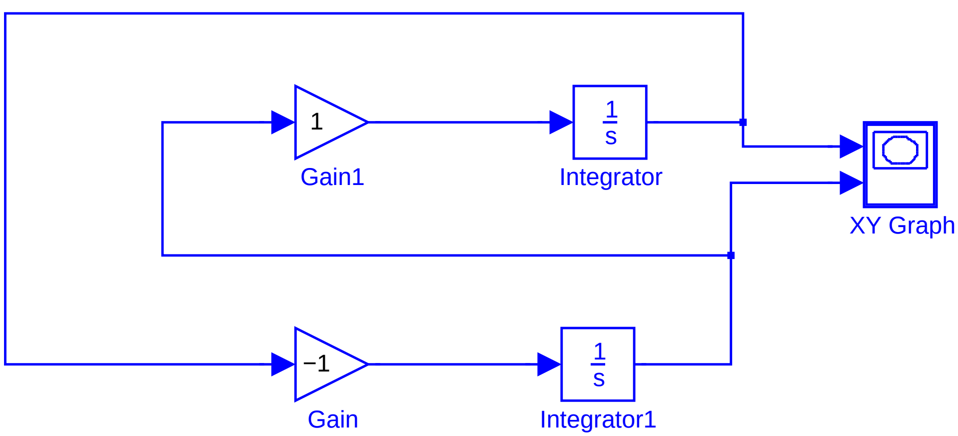
$$y' = -x$$

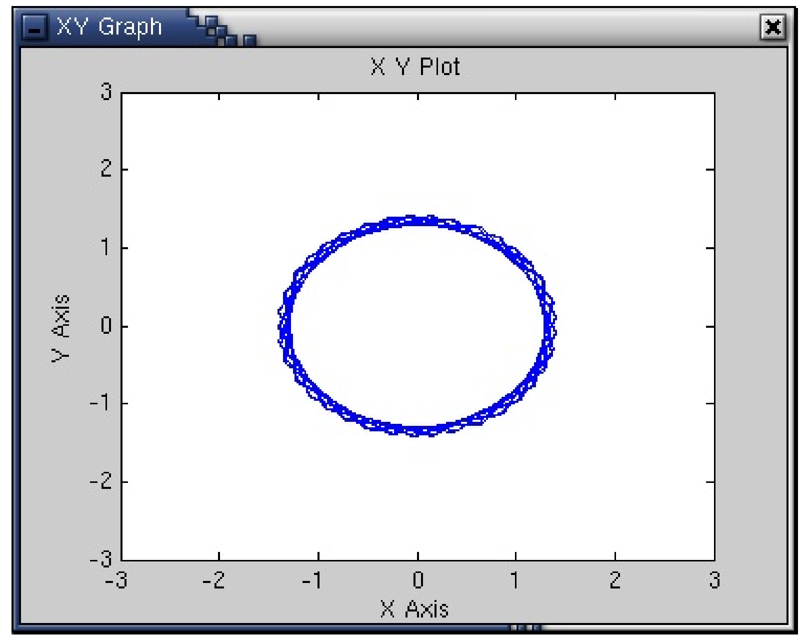


Sinus et cosinus

$$x' = y$$

$$y' = -x$$





Phénomème oscillatoire, intermédiaire entre stable et instable

Peut être étudié par la méthode de Lyapunov