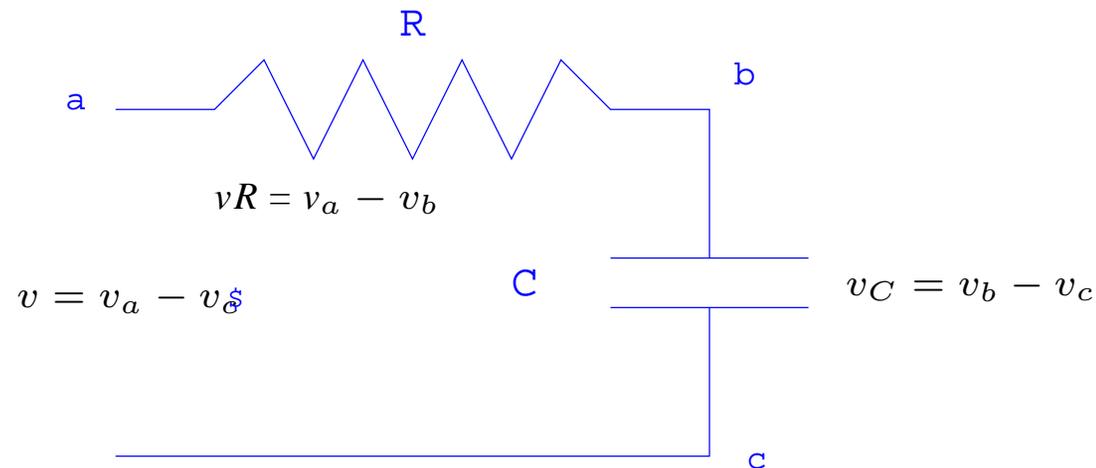


# Pouvoir d'expression des équations différentielles

- Un condensateur
- La thermique d'un bâtiment
- L'alcoolémie
- Un circuit résonnant
- Une suspension d'automobile
- Un pendule inverse
- Les petits mouvements
- Proies et prédateurs
- Cinétique chimique

# Un condensateur

plan



Equation du condensateur :  $q = Cv_C$

Equation de la résistance :  $v_R = Ri = -Rq'$

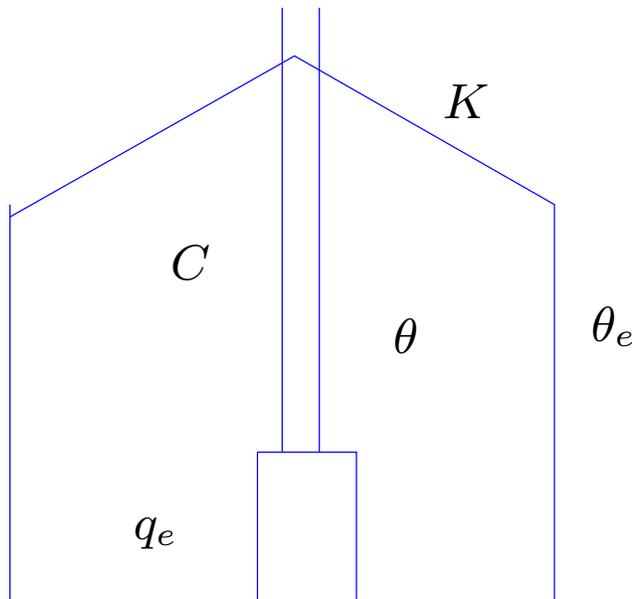
Equation du potentiel :  $v = v_R + v_C$

D'où :  $v_C = v - RCv'_C$

$$v'_C + \frac{1}{RC}v_C = \frac{1}{RC}v$$

# La thermique d'un bâtiment

plan



température intérieure :  $\theta$

température extérieure :  $\theta_e$

puissance du chauffage :  $q_e$

capacité calorifique du bâtiment :  $C$

conductivité thermique des parois :  $K$

Echange thermique :  $q' = K(\theta_e - \theta) + q_e$

Température :  $q = C\theta$

D'où :

$$\theta' + \frac{K}{C}\theta = \frac{K}{C}\theta_e + \frac{1}{C}q_e$$

# Alcoolémie

plan

Vous avez bu une bière-téquila ; comment évolue votre alcoolémie ?

Alcool dans le sang = alcool ingéré -alcool métabolisé

$$q_s = q_b - q_m$$

Concentration dans le sang :

$$c_s = \frac{q_s}{V}$$

Métabolisme :

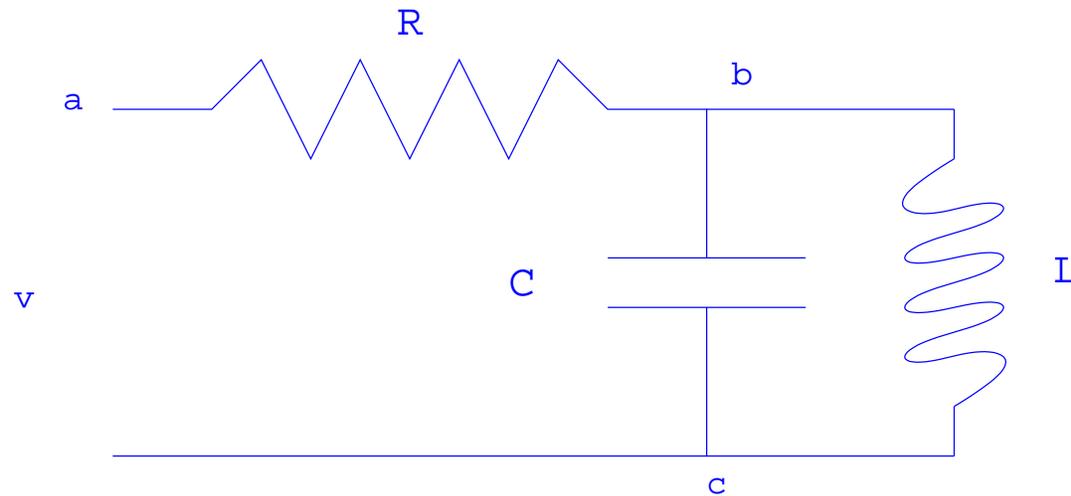
$$q'_m = K c_s$$

D'où :

$$c'_s + \frac{K}{V} c_s = \frac{1}{V} q'_b$$

# Un circuit résonnant

plan



Equation du condensateur :  $q_C = Cv_o$

Equation de la self :  $v_o = -Li'_L$

Equation de la résistance :  $v_o - v_e = Ri$

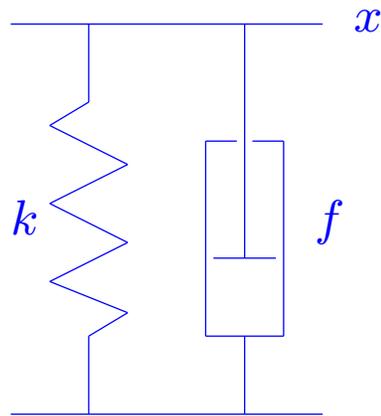
Equation du courant :  $i = i_C + i_L$

D'où :  $v'_o - v'_e = R(-Cv''_o - \frac{1}{L}v_o)$

$$v''_o + \frac{1}{RC}v'_o + \frac{1}{LC}v_o = \frac{1}{RC}v'_e$$

# Une suspension de voiture

plan



Forces en présence :

- ressort :  $-k(x - x_0)$
- amortisseur :  $-fx'$
- inertie :  $mx''$
- force externe, pesanteur,...

bilan : équation différentielle

$$mx'' + fx' + kx = u$$

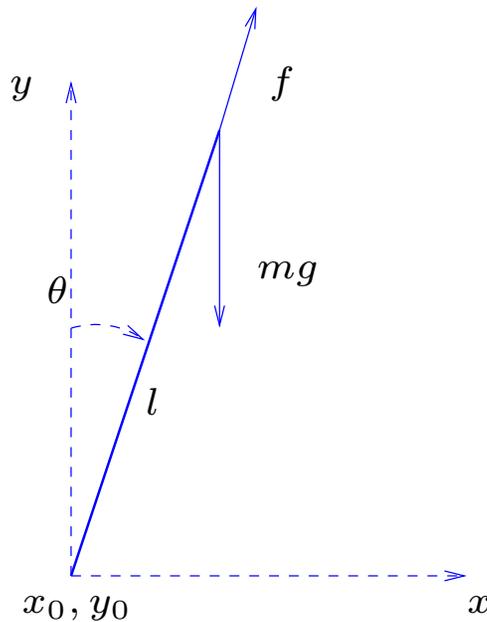
normalisation :

$$x'' + 2zwx' + w^2x = w^2u$$

- $w$  pulsation propre
- $z$  amortissement

# Un pendule inverse

plan



Forces en présence :

- pesanteur :  $m \vec{g}$
- réaction du pendule :  $\vec{f}$

Géométrie :

- $x = x_0 + l \sin(\theta)$
- $y = y_0 + l \cos(\theta)$

Equation de Newton :  $m \vec{g} + \vec{f} = m \vec{\gamma}$  se décompose en  $\gamma_r$  (radiale) et  $\gamma_t$  (tangentielle);  $\gamma_t = g \sin(\theta) = x'' \cdot \cos(\theta) - y'' \cdot \sin(\theta)$   
 $x' = x_0' + l \cdot \cos(\theta) \cdot \theta'$   
 $x'' = x_0'' - l \cdot \sin(\theta) \cdot \theta'^2 + l \cdot \cos(\theta) \cdot \theta''$   
 $y' = y_0' - l \cdot \sin(\theta) \cdot \theta'$        $y'' = y_0'' - l \cdot \cos(\theta) \cdot \theta'^2 - l \cdot \sin(\theta) \cdot \theta''$

$$\theta'' = ((y_0'' + g)/l) \cdot \sin(\theta) - (x_0''/l) \cdot \cos(\theta)$$

$$\theta'' = ((y_0'' + g)/l) \cdot \sin(\theta) - (x_0''/l) \cdot \cos(\theta)$$

Au voisinage du point haut :

$$\cos(\theta) \approx 1$$

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$\theta'' = ((y_0'' + g)/l) \cdot \theta - (x_0''/l)$$

Au voisinage du point bas :

$$\cos(\theta) \approx -1$$

$$\sin(\theta) \approx -\theta$$

$$\theta'' = -((y_0'' + g)/l) \cdot \theta + (x_0''/l)$$

# Proies et prédateurs

---

plan

La natalité des prédateurs croît avec la quantité des proies :

$$x' = \lambda_x y x - \mu_x x$$

La mortalité des proies croît avec la quantité de prédateurs :

$$y' = \lambda_y y - \mu_y x y$$

# Cinétique chimique

plan

Acide + Base = Sel + Eau :



Lois de la cinétique : la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration des constituants :

$$[A]' = [B]' = -[S]' = -[E]' = \lambda[S][E] - \mu[A][B]$$

D'où l'équilibre chimique :

$$[A]' = [B]' = -[S]' = -[E]' = 0$$

$$\lambda[S][E] = \mu[A][B]$$