Raisonnement structuré 2020-2021 – TD série 4

Le thème général est celui des démonstrations par récurrence (simple, généralisé, structurelle). On pourra ponctuellement développer l'arbre de preuve, mais on privilégiera une présentation textuelle rigoureuse.

On considère l'ensemble des naturels, défini de manière inductive.

— 0 est un entier naturel
— si n est un entier naturel, $\mathrm{S}(n)$ est un entier naturel

On définit l'addition par les 2 équations suivantes (admis) :

— Axiome $+0$: $\forall n, n+0=n$
— Axiome $+S$: $\forall n, \forall m, n+\mathrm{S}(m)=\mathrm{S}(n+m)$

On définit la relation $\leq$ par

— $\forall n \forall m, n \leq m$ ssi $\exists x, n+x=m$

Exercice 1

Démontrer que 0 est neutre à gauche, *i.e.* $\forall n, 0+n=n$

Exercice 2

Démontrer que $+$ est commutative, *i.e.* $\forall m\ \forall n\ n+m=m+n$.

Commencer par $\forall n\ \forall m\ \mathrm{S}(n)+m=\mathrm{S}(n+m)$ par récurrence sur m (attention, pas sur n). Ensuite procéder par récurrence sur n en utilisant ce résultat et l'exercice précédent.

Exercice 3

Démontrer que $+$ est associative, *i.e.*

— $\forall n\ \forall m\ \forall p\ , n+(m+p)=(n+m)+p$

Exercice 4

Démontrer que $\leq$ est réflexive et transitive

Exercice 5

Les plaquettes de chocolat

Prenons une plaquette de n carrés et découpons la en suivant les rainures. En combien de coups a-t-on réduit la plaquette en carrés ?

Exercice 6

On considère le singleton $\{\mathrm{B}\}$ (comme bâton). On considère l'ensemble des listes de bâtons, défini de manière inductive.

— Nil est une liste de bâtons
— si l est une liste de bâtons, $\mathrm{B} :: l$ est une liste de bâtons.

Énoncer le principe de récurrence structurelle sur les listes de bâtons. Montrer qu'à tout entier n on peut associer une unique liste de bâtons.