

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007



INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 6



- └ Double négation, tiers exclu
- └ La double négation

La double négation

A-t-on l'équivalence entre A et $\neg\neg A$?

- ▶ $A \Rightarrow \neg\neg A$ (pas difficile)
- ▶ mais la réciproque $\neg\neg A \Rightarrow A$ **ne peut se démontrer** avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de $\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg\neg E$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Utilisation de définitions et arbres de preuve

Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$ étant $A \Rightarrow \perp$ par définition, (où A est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté $\neg A$ par $A \Rightarrow \perp$ et réciproquement

Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\frac{\dots \neg A \dots}{\neg A} \neg \text{déf}$$

$$\frac{\dots A \dots}{A \Rightarrow \perp} \neg \text{déf}$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Utilisation de définitions et arbres de preuve

Exemples

Exemple 1

$$\frac{(A \wedge B) \Rightarrow \perp}{\neg(A \wedge B)} \neg \text{déf}$$

Exemple 2

$$\frac{A \wedge (B \Rightarrow \perp)}{A \wedge \neg B} \neg \text{déf}$$

Exemple 3

$$\frac{A \vee \neg\neg B}{A \vee (\neg B \Rightarrow \perp)} \neg \text{déf}$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Raisonnement par l'absurde

Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition A de manière indirecte, en *raisonnant par l'absurde* :

- ▶ supposer $\neg A$
- ▶ en déduire l'absurde \perp
- ▶ par $\Rightarrow I$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \perp$, c-à-d. $\neg\neg A$
- ▶ par $\neg\neg E$ inférer A

$$\frac{\frac{\frac{\dots \neg A \dots}{\neg A} \neg \text{déf}}{\dots \neg A \dots \Rightarrow \perp} \Rightarrow I[1]}{A} \neg\neg E$$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Raisonnement par l'absurde

Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de $\neg\neg E$

- ▶ $\neg\neg A \Rightarrow A$ (évidemment !)
- ▶ $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- ▶ $\neg(\forall x P(x)) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$



- └ Double négation, tiers exclu
- └ Raisonnement par l'absurde

Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- ▶ pour n'importe quelle proposition A , on a soit A soit sa négation $\neg A$.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de *principe du tiers exclu*.

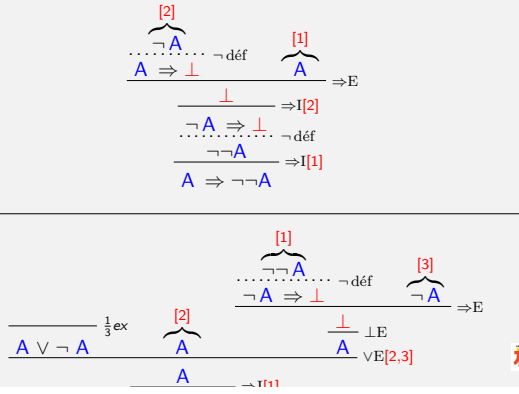
$$\frac{}{A \vee \neg A} \frac{1}{2} \text{ex}$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg E$ (théorème fondamental de réduction).

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

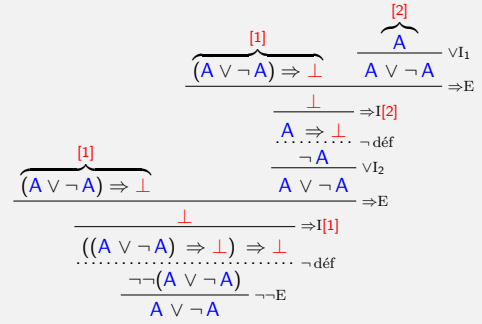


Quelques arbres de preuve avec négation (1)



Quelques arbres de preuve avec négation (2)

Dérivation du tiers exclu utilisant $\neg\neg E$



Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi A ou $\neg A$ est vérifié. Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de x .

- ▶ démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg E$
- ▶ mais moins informatives

Définition

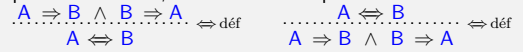
- ▶ la **logique classique** est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg E$)
- ▶ la **logique intuitionniste** est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg E$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations **constructives**, contrairement à la logique classique.

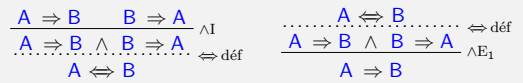
L'équivalence

Définition : $A \Leftrightarrow B \stackrel{\text{déf}}{=} A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :



En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge I$, $\wedge E_1$ et $\wedge E_2$:



et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge E_2$.

En raccourci (la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes) :

