# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007



INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

## Cours 6



## La double négation

A-t-on l'équivalence entre $A$ et $\neg\neg A$ ?

- $A \Rightarrow \neg\neg A$ (pas difficile)
- mais la réciproque $\neg\neg A \Rightarrow A$ ne peut se démontrer avec les règles précédentes (cf. théorème fondamental d'élimination des coupures)

D'où :

Règle supplémentaire : élimination de $\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg A}{A}\,\neg\neg\mathrm{E}$$



## Utilisation de définitions et arbres de preuve

$\neg A$ étant $A \Rightarrow \bot$ par définition,
(où $A$ est une proposition quelconque) on peut remplacer à volonté $\neg A$ par $A \Rightarrow \bot$ et réciproquement

Convention

On utilise une barre de fraction en pointillé

$$\frac{A \Rightarrow \bot}{\neg A}\,\neg\text{déf} \qquad \frac{\neg A}{A \Rightarrow \bot}\,\neg\text{déf}$$



## Exemples

Exemple 1

$$\frac{(A \wedge B) \Rightarrow \bot}{\neg(A \wedge B)}\,\neg\text{déf}$$

Exemple 2

$$\frac{A \wedge (B \Rightarrow \bot)}{A \wedge \neg B}\,\neg\text{déf}$$

Exemple 3

$$\frac{A \vee \neg\neg B}{A \vee (\neg B \Rightarrow \bot)}\,\neg\text{déf}$$



## Raisonnement par l'absurde

La règle d'élimination de la double négation permet de démontrer une proposition $A$ de manière indirecte, en *raisonnant par l'absurde :*

- supposer $\neg A$
- en déduire l'absurde $\bot$
- par $\Rightarrow_{\mathrm{I}}$, inférer $(\neg A) \Rightarrow \bot$, c-à-d. $\neg\neg A$
- par $\neg\neg\mathrm{E}$ inférer $A$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{\neg A}^{[1]}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A \Rightarrow \bot}\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}{\neg\neg A}\,\neg\text{déf}}{A}\,\neg\neg\mathrm{E}$$



## Utilisation du raisonnement par l'absurde

Exemples d'utilisation indispensable de $\neg\neg\mathrm{E}$

- $\neg\neg A \Rightarrow A$ (évidemment !)
- $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(\forall x\ P(x)) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$



## Tiers exclu et raisonnement par l'absurde

Autre forme usuelle de raisonnement :

- pour n'importe quelle proposition $A$,
  on a soit $A$ soit sa négation $\neg A$.

Pas de troisième possibilité, d'où le nom de *principe du tiers exclu*.

$$\frac{}{A \vee \neg A}\,\tfrac{1}{3}ex$$

Le tiers exclu ne peut être démontré à partir des règles précédentes à moins d'utiliser $\neg\neg\mathrm{E}$ *(théorème fondamental de réduction)*.

Réciproquement, le tiers exclu permet d'éliminer les doubles négations.

## Quelques arbres de preuve avec négation (1)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{\neg A}^{[2]}}{A \Rightarrow \bot}\ \neg\text{déf} \qquad \overbrace{A}^{[1]}}{\bot}\ \Rightarrow\text{E}}{\neg A \Rightarrow \bot}\ \Rightarrow\text{I}[2]}{\neg\neg A}\ \neg\text{déf}}{A \Rightarrow \neg\neg A}\ \Rightarrow\text{I}[1]$$

---

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vee \neg A}\ \tfrac{1}{3}ex \qquad \overbrace{A}^{[2]} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{\neg\neg A}^{[1]}}{\neg A \Rightarrow \bot}\ \neg\text{déf} \qquad \overbrace{\neg A}^{[3]}}{\bot}\ \Rightarrow\text{E}}{A}\ \bot\text{E}}{A}\ \vee\text{E}[2,3]}{\ }\ \Rightarrow\text{I}[1]$$



## Quelques arbres de preuve avec négation (2)

### Dérivation du tiers exclu utilisant $\neg\neg\text{E}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{(A \vee \neg A) \Rightarrow \bot}^{[1]} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{(A \vee \neg A) \Rightarrow \bot}^{[1]} \qquad \cfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{A \vee \neg A}\ \vee\text{I}_1}{\bot}\ \Rightarrow\text{E}}{A \Rightarrow \bot}\ \Rightarrow\text{I}[2]}{\neg A}\ \neg\text{déf}}{A \vee \neg A}\ \vee\text{I}_2}{\bot}\ \Rightarrow\text{E}}{((A \vee \neg A) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot}\ \Rightarrow\text{I}[1]$$

$$\cfrac{\cfrac{((A \vee \neg A) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot}{\neg\neg(A \vee \neg A)}\ \neg\text{déf}}{A \vee \neg A}\ \neg\neg\text{E}$$



## Logique constructive (ou non)

L'axiome du tiers exclu ne dit pas lequel parmi $A$ ou $\neg A$ est vérifié
Dans une démonstration par l'absurde, ou utilisant le tiers exclu, de $\exists x\ P(x)$ on n'a pas le témoin de l'existence de $x$

- démonstrations plus faciles avec $\frac{1}{3}ex$ ou $\neg\neg\text{E}$
- mais moins informatives

### Définition

- la *logique classique* est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, avec $\frac{1}{3}ex$ (ou $\neg\neg\text{E}$)
- la *logique intuitionniste* est le système de déduction naturelle comprenant toutes les règles précédentes, sans $\frac{1}{3}ex$ (ni $\neg\neg\text{E}$)

Conséquence : la logique intuitionniste n'accepte que des démonstrations *constructives*, contrairement à la logique classique.



## L'équivalence

Définition : $\boxed{A \Leftrightarrow B \ \overset{\text{déf}}{\equiv}\ A \Rightarrow B \ \wedge\ B \Rightarrow A}$

On peut donc utiliser, dans un arbre de preuve :

$$\cfrac{A \Rightarrow B \ \wedge\ B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow\text{déf} \qquad \cfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge\ B \Rightarrow A}\ \Leftrightarrow\text{déf}$$

En général, on les utilise en combinaison avec $\wedge\text{I}$, $\wedge\text{E}_1$ et $\wedge\text{E}_2$ :

$$\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Rightarrow B \ \wedge\ B \Rightarrow A}\ \wedge\text{I}}{A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow\text{déf} \qquad \cfrac{\cfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B \ \wedge\ B \Rightarrow A}\ \Leftrightarrow\text{déf}}{A \Rightarrow B}\ \wedge\text{E}_1$$

et similairement pour $B \Rightarrow A$ en utilisant $\wedge\text{E}_2$.

En raccourci *(la double barre de fraction symbolise plusieurs étapes)* :

$$\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{\overline{A \Leftrightarrow B}}\ \wedge\text{I} \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{\overline{A \Rightarrow B}}\ \wedge\text{E}_1 \qquad \dfrac{A \Leftrightarrow B}{\overline{B \Rightarrow A}}\ \wedge\text{E}_2$$