

# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,  
Grenoble I

2007

# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,  
Grenoble I

2007

## Cours 2

# Plan du chapitre

## Récapitulation

# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés  
langage permettant de construire systématiquement des énoncés  
(en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés  
langage permettant de construire systématiquement des énoncés  
(en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés  
langage permettant de construire systématiquement des énoncés  
(en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés  
langage permettant de construire systématiquement des énoncés  
(en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés  
langage permettant de construire systématiquement des énoncés  
(en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*



# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

## Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés  
(en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

# Terrain de la logique : bien délimité

## Connecteurs logiques

- ▶ conjonction  $\wedge$
- ▶ disjonction  $\vee$
- ▶ implication  $\Rightarrow$
- ▶ autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence  $\Leftrightarrow$

## Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

## Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu  
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

## Hors logique

L'interprétation des énoncés (ou de leurs constituants élémentaires) dans la réalité.

Lois de la physique, de la chimie, de la biologie, du gruyère, de l'économie...

## À retenir

### Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- ▶ formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- ▶ chaque nœud est une règle d'inférence
- ▶ chaque feuille est une hypothèse
- ▶ la racine est le théorème démontré

### Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc

→ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

déduction naturelle

## À retenir

### Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- ▶ formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- ▶ chaque nœud est une règle d'inférence
- ▶ chaque feuille est une hypothèse
- ▶ la racine est le théorème démontré

### Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc

→ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

déduction naturelle

## À retenir

### Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- ▶ formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- ▶ chaque nœud est une règle d'inférence
- ▶ chaque feuille est une hypothèse
- ▶ la racine est le théorème démontré

### Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc

→ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

déduction naturelle

# Déduction naturelle

# Plan du chapitre

Éléments

Conjonction

Implication

Notion de théorème



# Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des énoncés élémentaires :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés déjà construits :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des **énoncés déjà construits** :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

▶ des **énoncés élémentaires** :

▶  $p \Rightarrow q$ ,

▶  $p \wedge q$ ,

▶  $p \vee q$ ,

▶ etc.

▶ des **énoncés déjà construits** :

▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,

▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,

▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

▶ des **énoncés élémentaires** :

▶  $p \Rightarrow q$ ,

▶  $p \wedge q$ ,

▶  $p \vee q$ ,

▶ etc.

▶ des énoncés **déjà construits** :

▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,

▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,

▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

▶ des **énoncés élémentaires** :

▶  $p \Rightarrow q$ ,

▶  $p \wedge q$ ,

▶  $p \vee q$ ,

▶ etc.

▶ des énoncés **déjà construits** :

▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,

▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,

▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés déjà construits :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés déjà construits :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés **déjà construits** :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.



# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés **déjà construits** :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés **déjà construits** :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

# Énoncés logiques, formules

On se donne des **énoncés élémentaires** (ou **atomiques**)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un **connecteur**  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$ ,

$\vee$

- ▶ des **énoncés élémentaires** :
  - ▶  $p \Rightarrow q$ ,
  - ▶  $p \wedge q$ ,
  - ▶  $p \vee q$ ,
  - ▶ etc.
- ▶ des énoncés **déjà construits** :
  - ▶  $(p \wedge q) \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ,
  - ▶  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ,
  - ▶ etc.

## Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur

Pour chaque connecteur  $*$ , on donne

- ▶ les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : règles d'introduction
- ▶ les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : règles d'élimination

## Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur

Pour chaque connecteur  $*$ , on donne

- ▶ les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : règles d'introduction
- ▶ les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : règles d'élimination

## Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur

Pour chaque connecteur  $*$ , on donne

- ▶ les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : règles d'introduction
- ▶ les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : règles d'élimination

## Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur

Pour chaque connecteur  $*$ , on donne

- ▶ les règles canoniques qui permettent d'**inférer** une nouvelle formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : **règles d'introduction**
- ▶ les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : **règles d'élimination**

## Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur

Pour chaque connecteur  $*$ , on donne

- ▶ les règles canoniques qui permettent d'**inférer** une nouvelle formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : **règles d'introduction**
- ▶ les règles canoniques qui permettent d'**utiliser** une formule  $A * B$  à partir des sous-formules  $A$  et  $B$  : **règles d'élimination**



# Plan du chapitre

Éléments

Conjonction

Implication

Notion de théorème

## Connecteur le plus simple : la conjonction $\wedge$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Remarque :  $A$  et  $B$  représentent des énoncés quelconques (en prenant des exemplaires particuliers, on obtient une déclinaison possible de chaque règle)

## Connecteur le plus simple : la conjonction $\wedge$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Remarque :  $A$  et  $B$  représentent des énoncés quelconques (en prenant des exemplaires particuliers, on obtient une déclinaison possible de chaque règle)

## Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer  $B \wedge A$  à partir de  $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Démonstration

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

NB.

- ▶ l'ordre des prémisses est important
- ▶ la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

## Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer  $B \wedge A$  à partir de  $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Démonstration

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

NB.

- ▶ l'ordre des prémisses est important
- ▶ la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

## Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer  $B \wedge A$  à partir de  $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Démonstration

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

NB.

- ▶ l'ordre des prémisses est important
- ▶ la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

## Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer  $B \wedge A$  à partir de  $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Démonstration

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

NB.

- ▶ l'ordre des prémisses est important
- ▶ la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

## Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer  $B \wedge A$  à partir de  $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Démonstration

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

NB.

- ▶ l'ordre des prémisses est important
- ▶ la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)



# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$



# Commutativité de $\wedge$ , textuellement

## Démonstration textuelle

- ▶ supposons  $A \wedge B$  ..... (1)
- ▶ de (1), on infère  $B$
- ▶ de (1), on infère  $A$
- ▶ des deux conclusions précédentes, on infère  $B \wedge A$

## Démonstration formelle

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

# Conjonction

## Démarche

## Démarche

La déduction naturelle se prête à une **démarche systématique** pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

## Démarche

La déduction naturelle se prête à une **démarche systématique** pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- ▶ prendre comme **but** la conclusion désirée
- ▶ on a **fini** si le but est déjà parmi les **hypothèses**
- ▶ sinon, examiner la **forme** du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'**introduction** (décomposition du but)
- ▶ **recommencer** en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- ▶ lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par **décomposition** d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'**élimination**

## Démarche

La déduction naturelle se prête à une **démarche systématique** pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- ▶ prendre comme **but** la conclusion désirée
- ▶ on a **fini** si le but est déjà parmi les **hypothèses**
- ▶ sinon, examiner la **forme** du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'**introduction** (décomposition du but)
- ▶ **recommencer** en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- ▶ lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par **décomposition** d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'**élimination**

## Démarche

La déduction naturelle se prête à une **démarche systématique** pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- ▶ prendre comme **but** la conclusion désirée
- ▶ on a **fini** si le but est déjà parmi les **hypothèses**
- ▶ sinon, examiner la **forme** du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'**introduction** (**décomposition** du **but**)
- ▶ **recommencer** en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- ▶ lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par **décomposition** d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'**élimination**

## Démarche

La déduction naturelle se prête à une **démarche systématique** pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- ▶ prendre comme **but** la conclusion désirée
- ▶ on a **fini** si le but est déjà parmi les **hypothèses**
- ▶ sinon, examiner la **forme** du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'**introduction** (**décomposition** du **but**)
- ▶ **recommencer** en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- ▶ lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par **décomposition** d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'**élimination**

## Démarche

La déduction naturelle se prête à une **démarche systématique** pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- ▶ prendre comme **but** la conclusion désirée
- ▶ on a **fini** si le but est déjà parmi les **hypothèses**
- ▶ sinon, examiner la **forme** du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'**introduction** (**décomposition** du **but**)
- ▶ **recommencer** en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- ▶ lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par **décomposition** d'une **hypothèse** appropriée en utilisant une règle d'**élimination**



## Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de **structurer** la **rédaction** d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

## Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de **structurer** la **rédaction** d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

- ▶ il suffit de suivre les règles appliquées
- ▶ La rédaction textuelle a tendance à être peu précise  
→ connaître l'arbre de preuve aide à l'améliorer.

## Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de **structurer** la **rédaction** d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

- ▶ il suffit de suivre les règles appliquées
- ▶ La rédaction textuelle a tendance à être peu précise  
→ connaître l'arbre de preuve aide à l'améliorer.

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$



## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$ 
  - ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
  - ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$ 
  - ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
  - ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

## Commutativité de $\wedge$ , démarche systématique

### Raisonnement textuel pour la recherche

- ▶ on se donne l'hypothèse  $A \wedge B$
- ▶ on se donne comme but  $B \wedge A$
- ▶ décomposition de  $B \wedge A$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $B$
- ▶ éliminer  $A \wedge B$  pour obtenir  $A$

### Démonstration formelle en construction

$$\begin{array}{c}
 A \wedge B \\
 \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I
 \end{array}$$

# Plan du chapitre

Éléments

Conjonction

**Implication**

Notion de théorème

## Implication

### Règles

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$

Gestion des hypothèses

Règle définitive  $\Rightarrow I$



# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

## Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

## Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$

# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$



# Implication

Élimination : comment utiliser  $A \Rightarrow B$  ?

- ▶ si on a  $A \Rightarrow B$
- ▶ et si on a  $A$
- ▶ on infère  $B$

$$\boxed{\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E}$$

Introduction : comment inférer (conclure)  $A \Rightarrow B$  ?

En démontrant  $B$  à partir de  $A$

- ▶ supposons  $A$
- ▶ on démontre  $B$
- ▶ on infère  $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

**$A$  n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour  $A \Rightarrow B$ .**

## Implication

Règles

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$

Gestion des hypothèses

Règle définitive  $\Rightarrow$  I

## Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

On va démontrer  $C$  en utilisant l'hypothèse (1) et l'hypothèse (3) en utilisant l'hypothèse (2).

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

On va utiliser l'hypothèse (1) et (3) pour démontrer  $B$  à partir de l'hypothèse (2).

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$ )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \quad \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \quad \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow I \\
 \hline
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow I \\
 \hline
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow I \\
 \hline
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B} \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow I \\
 \hline
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$



Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 B \Rightarrow C \quad A \Rightarrow B \quad A \Rightarrow E \\
 \hline
 C \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 B \Rightarrow E \\
 \hline
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ on va utiliser l'hypothèse (1) et l'hypothèse (2) en utilisant l'hypothèse (3) on obtient :

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 B \\
 \Rightarrow E \\
 \hline
 C \\
 \Rightarrow I \\
 \hline
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

On va utiliser l'hypothèse (1) et (3) pour démontrer  $B$  à partir de l'hypothèse (2).

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$ )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \quad \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 B \Rightarrow C \Rightarrow E \\
 \hline
 C \Rightarrow I \\
 A \Rightarrow C
 \end{array}
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$ )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \hspace{10em} B \\
 \hspace{10em} \Rightarrow E
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$



Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10cm}} \\
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 C \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow C
 \end{array}
 \Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \hspace{2cm} B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \hspace{10em} B \\
 \hspace{10em} \Rightarrow E \\
 \hspace{10em} C \\
 \hspace{10em} \Rightarrow I \\
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$


---


$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10cm}} \\
 C \\
 \Rightarrow I \\
 A \Rightarrow C
 \end{array}$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

$$\frac{\hspace{10em}}{B} \Rightarrow E$$

$$\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

$$\frac{B \Rightarrow C \quad B}{C} \Rightarrow E$$

$$\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$ 

Il faut démontrer  $A \Rightarrow C$  à partir de  $A \Rightarrow B$  et de  $B \Rightarrow C$

▶ supposons  $A \Rightarrow B$  ..... (1)

▶ supposons  $B \Rightarrow C$  ..... (2)

▶ (*pour démontrer  $A \Rightarrow C$ , on va démontrer  $C$  à partir de l'hypothèse supplémentaire  $A$* )

▶ supposons  $A$  ..... (3)

▶ de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère  $B$

▶ puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère  $C$

▶ ayant déduit  $C$  à partir de  $A$ , on infère  $A \Rightarrow C$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{2} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 B \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{1} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 A \Rightarrow B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{3} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 A
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

$$\frac{\hspace{10em}}{B} \Rightarrow E$$

$$\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I$$



## Implication

Règles

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$

**Gestion des hypothèses**

Règle définitive  $\Rightarrow I$

## Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{TRI} \qquad \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C

mais pas si on suppose qu'on conclut à partir de C à partir des feuilles

$$\frac{B \Rightarrow C \quad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow E}{C} \Rightarrow E$$

3

## Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{ TRI} \qquad \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à **C** mais **faux** à l'étape finale où l'on conclut  $A \Rightarrow C$  à partir des seules hypothèses  $A \Rightarrow B$  et  $B \Rightarrow C$  : l'hypothèse  $A$  est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\frac{B \Rightarrow C \quad \frac{A \Rightarrow B \quad \overset{3}{A}}{B} \Rightarrow E}{C} \Rightarrow E$$

## Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{ TRI} \qquad \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à  $C$  mais faux à l'étape finale où l'on conclut  $A \Rightarrow C$  à partir des seules hypothèses  $A \Rightarrow B$  et  $B \Rightarrow C$  : l'hypothèse  $A$  est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\frac{\frac{B \Rightarrow C}{C} \quad \frac{A \Rightarrow B \quad \overset{3}{A}}{B} \Rightarrow E}{B} \Rightarrow E$$

## Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{TRI} \qquad \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à  $C$  mais **faux** à l'étape finale où l'on conclut  $A \Rightarrow C$  à partir des seules hypothèses  $A \Rightarrow B$  et  $B \Rightarrow C$  : l'hypothèse  $A$  est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\frac{\frac{B \Rightarrow C \quad \frac{A \Rightarrow B \quad \overset{3}{A}}{B} \Rightarrow E}{C} \Rightarrow I}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I$$

## Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{TRI} \qquad \frac{\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2 \quad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à  $C$  mais **faux** à l'étape finale où l'on conclut  $A \Rightarrow C$  à partir des seules hypothèses  $A \Rightarrow B$  et  $B \Rightarrow C$  : l'hypothèse  $A$  est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\frac{\frac{B \Rightarrow C \quad \frac{A \Rightarrow B \quad \overset{3}{A}}{B} \Rightarrow E}{C} \Rightarrow I}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I$$

## Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont **disponibles**, les autres sont dites **levées** (ou **enlevées**).

On appelle **environnement** l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- ▶ numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]

Exemple de gestion sur l'hypothèse qui la libère

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

## Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont **disponibles**, les autres sont dites **levées** (ou **enlevées**).

On appelle **environnement** l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- ▶ numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]

Exemple : numérotation des hypothèses en l'ébauchant cette preuve

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \Rightarrow E$$



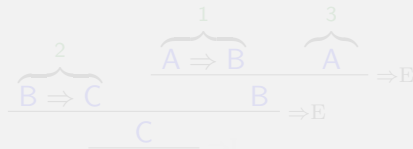
## Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont **disponibles**, les autres sont dites **levées** (ou **enlevées**).

On appelle **environnement** l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- ▶ numérotation des hypothèses, convention **disponible** / **[levée]**
- ▶ report du numéro sur l'inférence qui la lève



## Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont **disponibles**, les autres sont dites **levées** (ou **enlevées**).

On appelle **environnement** l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- ▶ numérotation des hypothèses, convention **disponible** / **[levée]**
- ▶ report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 C \Rightarrow I \\
 A \Rightarrow C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 B \Rightarrow E
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^3 \\
 \hline
 \Rightarrow E
 \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow E$$

## Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont **disponibles**, les autres sont dites **levées** (ou **enlevées**).

On appelle **environnement** l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- ▶ numérotation des hypothèses, convention **disponible** / **[levée]**
- ▶ report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^{[3]} \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I[3]
 \end{array}$$

## Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont **disponibles**, les autres sont dites **levées** (ou **enlevées**).

On appelle **environnement** l'ensemble des hypothèses disponibles.

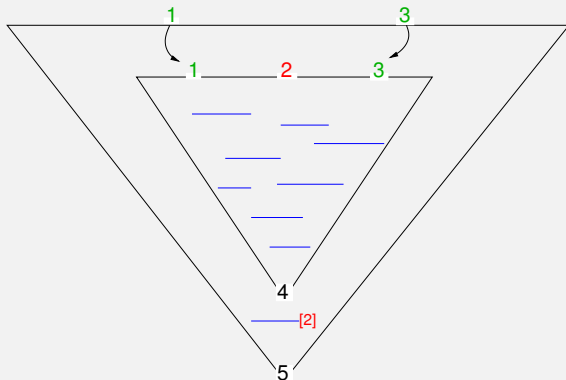
Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- ▶ numérotation des hypothèses, convention **disponible** / **[levée]**
- ▶ report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{B \Rightarrow C}^2 \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A \Rightarrow B}^1 \\
 \hline
 B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \overbrace{A}^{[3]} \\
 \hline
 A
 \end{array}
 \Rightarrow E \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \\
 \hline
 A \Rightarrow C \Rightarrow I[3]
 \end{array}
 \end{array}$$

## Un arbre de preuve formalise le raisonnement

- ▶ aboutissant à la conclusion (formule placée à sa racine),
- ▶ sous les hypothèses disponibles (feuilles « encore actives »).



## Implication

Règles

Exemple : transitivité de  $\Rightarrow$

Gestion des hypothèses

Règle définitive  $\Rightarrow$  I

Formulation définitive de  $\Rightarrow$  I

Ayant déduit B à partir de A

$$\begin{array}{c} \overbrace{\phantom{A}}^n \\ A \\ \vdots \\ B \end{array}$$

on infère  $A \Rightarrow B$ 

$$\boxed{\begin{array}{c} \overbrace{\phantom{A}}^{[n]} \\ A \\ \vdots \\ B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array}} \Rightarrow I[n]$$

Exemple (TRI) :

$$\frac{\overbrace{\phantom{B \Rightarrow C}}^2}{B \Rightarrow C} \quad \frac{\overbrace{\phantom{A \Rightarrow B}}^1 \quad \overbrace{\phantom{A}}^{[3]}}{A \Rightarrow B \quad A} \Rightarrow E}{B \Rightarrow E} \Rightarrow E}{\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I[3]}$$

Formulation définitive de  $\Rightarrow$  IAyant déduit  $B$  à partir de  $A$ 

$$\begin{array}{c} \overbrace{A}^n \\ \vdots \\ B \end{array}$$
on infère  $A \Rightarrow B$ 

$$\frac{\begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I[n]$$

Exemple (TRI) :

$$\frac{\overbrace{B \Rightarrow C}^2 \quad \frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^1 \quad \overbrace{A}^{[3]}}{B} \Rightarrow E}{B} \Rightarrow E}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I[3]$$



Formulation définitive de  $\Rightarrow$  IAyant déduit  $B$  à partir de  $A$ 

$$\begin{array}{c} \overbrace{A}^n \\ \vdots \\ B \end{array}$$

on infère  $A \Rightarrow B$ 

$$\boxed{\begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ B \end{array} \frac{}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I[n]}$$

Exemple (TRI) :

$$\frac{\overbrace{B \Rightarrow C}^2 \quad \frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^1 \quad \overbrace{A}^{[3]}}{B \Rightarrow E} \Rightarrow E}{\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I[3]} \Rightarrow E$$

Formulation définitive de  $\Rightarrow$  IAyant déduit  $B$  à partir de  $A$ 

$$\begin{array}{c} \overbrace{A}^n \\ \vdots \\ B \end{array}$$

on infère  $A \Rightarrow B$ 

$$\boxed{\begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ B \end{array} \frac{}{\quad} \Rightarrow I[n] \\ A \Rightarrow B}$$

Exemple (TRI) :

$$\frac{\overbrace{B \Rightarrow C}^2 \quad \frac{\overbrace{A \Rightarrow B}^1 \quad \overbrace{A}^{[3]}}{B} \Rightarrow E}{\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I[3]} \Rightarrow E$$

## Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{B} \wedge E_2 \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^1}{A} \wedge E_1}{B \wedge A} \wedge I$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

## Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\frac{
 \frac{
 \overbrace{A \wedge B}^1
 }{B} \wedge E_2
 \quad
 \frac{
 \overbrace{A \wedge B}^1
 }{A} \wedge E_1
 }{B \wedge A} \wedge I
 }{}$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

## Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \hline A \wedge B \end{array} \wedge E_2 \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline A \wedge B \end{array} \wedge E_1 \\
 \hline
 \begin{array}{c} B \quad A \\ \hline B \wedge A \end{array} \wedge I \\
 \hline
 (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A) \Rightarrow I
 \end{array}$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

## Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\frac{
 \frac{
 \overbrace{A \wedge B}^{[1]}
 }{B} \wedge E_2 \quad
 \frac{
 \overbrace{A \wedge B}^{[1]}
 }{A} \wedge E_1
 }{B \wedge A} \wedge I
 }{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)} \Rightarrow I[1]$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

## Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\frac{\frac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]} \wedge E_2}{B} \quad \frac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]} \wedge E_1}{A}}{B \wedge A} \wedge I$$

$$\frac{}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)} \Rightarrow I[1]$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

# Plan du chapitre

Éléments

Conjonction

Implication

Notion de théorème



## Notion de théorème

*Définition : un **théorème** est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées).*

Exemple :  $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$  est un théorème (mais pas  $B \wedge A$ )

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[1]}{A \wedge B} \wedge E_2}{B} \quad \frac{\frac{[1]}{A \wedge B} \wedge E_1}{A} \wedge I}{B \wedge A} \Rightarrow I[1] \\
 \hline
 (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)
 \end{array}$$

## Notion de théorème

**Définition :** un *théorème* est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées).

Exemple :  $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$  est un théorème (mais pas  $B \wedge A$ )

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [1] \\ \hline A \wedge B \\ \hline B \end{array} \wedge E_2 \quad \begin{array}{c} [1] \\ \hline A \wedge B \\ \hline A \end{array} \wedge E_1 \\
 \hline
 \begin{array}{c} B \wedge A \\ \hline \end{array} \wedge I \\
 \hline
 (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A) \Rightarrow I[1]
 \end{array}$$

## Notion de théorème

**Définition :** un *théorème* est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées).

**Exemple :**  $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$  est un théorème (mais pas  $B \wedge A$ )

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{[1]} \\ \hline A \wedge B \end{array} \wedge E_2 \quad \begin{array}{c} \text{[1]} \\ \hline A \wedge B \end{array} \wedge E_1 \\
 \hline
 \begin{array}{c} B \quad A \\ \hline B \wedge A \end{array} \wedge I \\
 \hline
 (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A) \Rightarrow I[1]
 \end{array}$$

## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$

## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$

## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$

## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$

## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$



## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$

## Quelques théorèmes élémentaires

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$\overbrace{A}^1 =$  arbre de prv d'hypothèse  $A$   
et de conclusion  $A$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$

$$\frac{\overbrace{B}^{[1]}}{\frac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]} \Rightarrow I[2]$$

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$