INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 2

Plan du chapitre

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Terrain de la logique : bien délimité

Connecteurs logiques

- conjonction $\wedge$
- disjonction $\vee$
- implication $\Rightarrow$
- autres connecteurs dérivés, par ex. l'équivalence $\Leftrightarrow$

Décomposition fonctionnelle et prédicative des énoncés

langage permettant de construire systématiquement des énoncés (en nombre arbitrairement grand) : *plus tard*

Quantification

énoncés portant sur tous les individus ou sur un individu
ex. la route / une route / toute route : *plus tard*

Hors logique

L'interprétation des énoncés (ou de leurs constituants élémentaires) dans la réalité.
Lois de la physique, de la chimie, de la biologie, du gruyère, de l'économie...

À retenir

Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- chaque nœud est une règle d'inférence
- chaque feuille est une hypothèse
- la racine est le théorème démontré

Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc
→ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

déduction naturelle

À retenir

Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- chaque nœud est une règle d'inférence
- chaque feuille est une hypothèse
- la racine est le théorème démontré

Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc

→ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

déduction naturelle

À retenir

Arbres de preuve (ou de démonstration)

Une démonstration est essentiellement un arbre

- formé à partir de règles d'inférence et d'hypothèses
- chaque nœud est une règle d'inférence
- chaque feuille est une hypothèse
- la racine est le théorème démontré

Sélection d'un jeu de règles d'inférence

TRI, OGI, EGI, correctes mais ad-hoc
$\longrightarrow$ abandonnées dans la suite au profit d'un système bien étudié, la

$\boxed{\text{déduction naturelle}}$

Déduction naturelle

Plan du chapitre

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.

On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Énoncés logiques, formules

On se donne des énoncés élémentaires (ou atomiques) p, q, r, etc.
On construit d'autres énoncés en reliant par un connecteur $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

- des énoncés élémentaires :
  - $p \Rightarrow q$,
  - $p \wedge q$,
  - $p \vee q$,
  - etc.
- des énoncés déjà construits :
  - $(p \wedge q) \wedge p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
  - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$,
  - etc.

Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur
Pour chaque connecteur $*$, on donne

- les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'introduction
- les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'élimination

Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur

Pour chaque connecteur $*$, on donne

- les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'introduction
- les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'élimination

Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur
Pour chaque connecteur $*$, on donne

- les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'introduction
- les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'élimination

Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur
Pour chaque connecteur $*$, on donne

- les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'introduction
- les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'élimination

Règles d'inférence en déduction naturelle

Chaque règle d'inférence porte sur un seul connecteur
Pour chaque connecteur $*$, on donne

- les règles canoniques qui permettent d'inférer une nouvelle formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'introduction
- les règles canoniques qui permettent d'utiliser une formule $A * B$ à partir des sous-formules A et B : règles d'élimination

Plan du chapitre

Connecteur le plus simple : la conjonction $\wedge$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge E_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge E_2$$

Remarque : A et B représentent des énoncés quelconques (en prenant des exemplaires particuliers, on obtient une déclinaison possible de chaque règle)

Connecteur le plus simple : la conjonction $\wedge$

$$\boxed{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge I} \qquad \boxed{\dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1} \qquad \boxed{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2}$$

Remarque : A et B représentent des énoncés quelconques (en prenant des exemplaires particuliers, on obtient une déclinaison possible de chaque règle)

Exemple : commutativité de ∧

But : démontrer $B \wedge A$ à partir de $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,{\wedge}\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,{\wedge}\mathrm{E}_1 \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,{\wedge}\mathrm{E}_2$$

Démonstration

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,{\wedge}\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,{\wedge}\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,{\wedge}\mathrm{I}$$

NB.

- l'ordre des prémisses est important
- la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer $B \wedge A$ à partir de $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1 \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2$$

Démonstration

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

NB.

- l'ordre des prémisses est important
- la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer $B \wedge A$ à partir de $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge E_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge E_2$$

Démonstration

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I$$

NB.

- l'ordre des prémisses est important
- la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer $B \wedge A$ à partir de $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1 \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2$$

Démonstration

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

NB.

- l'ordre des prémisses est important
- la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

Exemple : commutativité de $\wedge$

But : démontrer $B \wedge A$ à partir de $A \wedge B$

Rappel des règles

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2$$

Démonstration

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

NB.

- l'ordre des prémisses est important
- la même hypothèse peut être utilisée un nombre quelconque de fois (y compris 0)

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ ....(1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\ \wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\ \wedge E_1}{B \wedge A}\ \wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ . . . . (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ .... (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ . . . . (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ . . . . (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ .... (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ .... (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,{\scriptstyle \wedge E_2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,{\scriptstyle \wedge E_1}}{B \wedge A}\,{\scriptstyle \wedge I}$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ . . . . (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, textuellement

Démonstration textuelle

- supposons $A \wedge B$ .... (1)
- de (1), on infère B
- de (1), on infère A
- des deux conclusions précédentes, on infère $B \wedge A$

Démonstration formelle

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I$$

Conjonction

Démarche

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme but la conclusion désirée
- on a fini si le but est déjà parmi les hypothèses
- sinon, examiner la forme du but ; essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (du)
- recommencer en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par d'une appropriée en utilisant une règle d'élimination

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme but la conclusion désirée
- on a fini si le but est déjà parmi les hypothèses
- sinon, examiner la forme du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (décomposition du but)
- recommencer en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par décomposition d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'élimination

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme but la conclusion désirée
- on a fini si le but est déjà parmi les hypothèses
- sinon, examiner la forme du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (décomposition du but)
- recommencer en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par décomposition d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'élimination

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme but la conclusion désirée
- on a fini si le but est déjà parmi les hypothèses
- sinon, examiner la forme du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (décomposition du but)
- recommencer en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par décomposition d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'élimination

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme but la conclusion désirée
- on a fini si le but est déjà parmi les hypothèses
- sinon, examiner la forme du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (décomposition du but)
- recommencer en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par décomposition d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'élimination

Démarche

La déduction naturelle se prête à une démarche systématique pour la recherche d'une démonstration, en partant du bas (racine) :

- prendre comme but la conclusion désirée
- on a fini si le but est déjà parmi les hypothèses
- sinon, examiner la forme du but : essayer les règles qui aboutissent à une conclusion de cette forme, en privilégiant les règles d'introduction (décomposition du but)
- recommencer en prenant successivement comme nouveau but chacune des prémisses ; ces nouveaux buts sont des sous-formules du but précédent, donc plus simples
- lorsqu'un but est plus simple que les hypothèses disponibles, procéder par décomposition d'une hypothèse appropriée en utilisant une règle d'élimination

Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de structurer la rédaction d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

- il suffit de suivre les règles appliquées
- La rédaction textuelle a tendance à être peu précise
  $\longrightarrow$ connaître l'arbre de preuve aide à l'améliorer

Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de structurer la rédaction d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

- il suffit de suivre les règles appliquées
- La rédaction textuelle a tendance à être peu précise
  $\longrightarrow$ connaître l'arbre de preuve aide à l'améliorer.

Rédaction a posteriori

La déduction naturelle permet de structurer la rédaction d'une démonstration, en partant du haut (feuilles) :

- il suffit de suivre les règles appliquées
- La rédaction textuelle a tendance à être peu précise
  $\longrightarrow$ connaître l'arbre de preuve aide à l'améliorer.

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$A \wedge B$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$A \wedge B$$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$A \wedge B$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$A \wedge B$$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

Commutativité de $\land$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \land B$
- on se donne comme but $B \land A$
- décomposition de $B \land A$
- éliminer $A \land B$ pour obtenir B
- éliminer $A \land B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$A \land B$$

$$\dfrac{\dfrac{A \land B}{B}\,\land E_2 \qquad \dfrac{A \land B}{A}\,\land E_1}{B \land A}\,\land I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$A \wedge B$$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}_2} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}_1}}{B \wedge A}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$$A \wedge B$$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Commutativité de $\wedge$, démarche systématique

Raisonnement textuel pour la recherche

- on se donne l'hypothèse $A \wedge B$
- on se donne comme but $B \wedge A$
- décomposition de $B \wedge A$
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir B
- éliminer $A \wedge B$ pour obtenir A

Démonstration formelle en construction

$A \wedge B$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I$$

Plan du chapitre

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\ \Rightarrow\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\mathrm{E}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\mathrm{E}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\!\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\!\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$

Implication

Élimination : comment utiliser $A \Rightarrow B$?

- si on a $A \Rightarrow B$
- et si on a A
- on infère B

$$\boxed{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B} \Rightarrow\mathrm{E}}$$

Introduction : comment inférer (conclure) $A \Rightarrow B$?

En démontrant B à partir de A

- supposons A
- on démontre B
- on infère $A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}$$

A n'est plus une hypothèse de l'arbre de preuve pour $A \Rightarrow B$.

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ ....(1)
- supposons $B \Rightarrow C$ ....(2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\Rightarrow_E}{C}\Rightarrow_E}{A \Rightarrow C}\Rightarrow_I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ ....(1)
- supposons $B \Rightarrow C$ ....(2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow E}{C}\Rightarrow E}{A \Rightarrow C}\Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$
\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow E}{C}\Rightarrow E}{A \Rightarrow C}\Rightarrow I
$$

Exemple : transitivité de ⇒

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\Rightarrow\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer* $A \Rightarrow C$*, on va démontrer* C *à partir de l'hypothèse supplémentaire* A*)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer* $A \Rightarrow C$*, on va démontrer* C *à partir de l'hypothèse supplémentaire* A)
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer* $A \Rightarrow C$*, on va démontrer* C *à partir de l'hypothèse supplémentaire* A)
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ ....(1)
- supposons $B \Rightarrow C$ ....(2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B} \Rightarrow E}{C} \Rightarrow E}{A \Rightarrow C} \Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}E}{\dfrac{C}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}I}\,{\Rightarrow}E$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\;{\Rightarrow}E}{C}\;{\Rightarrow}E}{A \Rightarrow C}\;{\Rightarrow}I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\;{\Rightarrow}E}{C}\;{\Rightarrow}E}{A \Rightarrow C}\;{\Rightarrow}I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse , on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse , on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow E}{C}\Rightarrow E}{A \Rightarrow C}\Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ ....(1)
- supposons $B \Rightarrow C$ ....(2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow E}{C}\Rightarrow E}{A \Rightarrow C}\Rightarrow I$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{C}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{A \Rightarrow C}\,{\scriptstyle \Rightarrow I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer* $A \Rightarrow C$*, on va démontrer* C *à partir de l'hypothèse supplémentaire* A)
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\ \Rightarrow\mathrm{E}}{C}\ \Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\ \Rightarrow\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ ....(1)
- supposons $B \Rightarrow C$ ....(2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ ....(1)
- supposons $B \Rightarrow C$ ....(2)
- *(pour démontrer $A \Rightarrow C$, on va démontrer C à partir de l'hypothèse supplémentaire A)*
- supposons A ....(3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ . . . . (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ . . . . (2)
- *(pour démontrer* $A \Rightarrow C$*, on va démontrer* C *à partir de l'hypothèse supplémentaire* A)
- supposons A . . . . (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}$$

Exemple : transitivité de $\Rightarrow$

Il faut démontrer $A \Rightarrow C$ à partir de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow C$

- supposons $A \Rightarrow B$ .... (1)
- supposons $B \Rightarrow C$ .... (2)
- *(pour démontrer* $A \Rightarrow C$, *on va démontrer* C *à partir de l'hypothèse supplémentaire* A)
- supposons A .... (3)
  - de (3), en utilisant l'hypothèse (1), on infère B
  - puis en utilisant l'hypothèse (2), on infère C
- ayant déduit C à partir de A, on infère $A \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,\Rightarrow\mathrm{I}$$

Implication

Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\dfrac{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg} \qquad \mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rd}}\ \mathrm{TRI} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\ {\wedge}\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ {\wedge}\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\ {\wedge}\mathrm{I}$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C mais faux à l'étape finale où l'on conclut $A \Rightarrow C$ à partir des seules hypothèses $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$: l'hypothèse A est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\dfrac{B \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}$$

Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\dfrac{rv \Rightarrow rg \qquad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd}\,\mathrm{TRI} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\wedge\mathrm{I}$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C mais faux à l'étape finale où l'on conclut $A \Rightarrow C$ à partir des seules hypothèses $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$: l'hypothèse A est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\dfrac{B \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\Rightarrow\mathrm{E}$$

Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\dfrac{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg} \qquad \mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rd}}\,\mathrm{TRI} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,{\wedge}\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,{\wedge}\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,{\wedge}\mathrm{I}$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C mais faux à l'étape finale où l'on conclut $A \Rightarrow C$ à partir des seules hypothèses $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$: l'hypothèse A est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\dfrac{B \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}$$

Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\dfrac{rv \Rightarrow rg \qquad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd}\,\mathrm{TRI} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C mais faux à l'étape finale où l'on conclut $A \Rightarrow C$ à partir des seules hypothèses $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$: l'hypothèse A est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,\Rightarrow\mathrm{I}$$

Statut des feuilles

Dans nos premiers exemples, toutes les feuilles sont des hypothèses servant à démontrer la conclusion

$$\dfrac{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg} \qquad \mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rd}}\ \mathrm{TRI} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\ \wedge\mathrm{I}$$

Dans l'exemple précédent : encore vrai à l'étape aboutissant à C mais faux à l'étape finale où l'on conclut $A \Rightarrow C$ à partir des seules hypothèses $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$: l'hypothèse A est « levée » (i.e. enlevée) au dernier stade.

$$\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow C \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\ \Rightarrow\mathrm{E}}{C}\ \Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\ \Rightarrow\mathrm{I}$$

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont disponibles, les autres sont dites levées (ou enlevées).
On appelle environnement l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1}}{B}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}$$

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont disponibles, les autres sont dites levées (ou enlevées).
On appelle environnement l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}$$

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont disponibles, les autres sont dites levées (ou enlevées).
On appelle environnement l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\Rightarrow\mathrm{I}$$

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont disponibles, les autres sont dites levées (ou enlevées).
On appelle environnement l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{3}}{B}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{C}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[\;]$$

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont disponibles, les autres sont dites levées (ou enlevées).
On appelle environnement l'ensemble des hypothèses disponibles.

Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\Rightarrow\mathrm{I}[3]$$

Gestion des hypothèses

À un stade donné, certaines hypothèses sont disponibles, les autres sont dites levées (ou enlevées).
On appelle environnement l'ensemble des hypothèses disponibles.

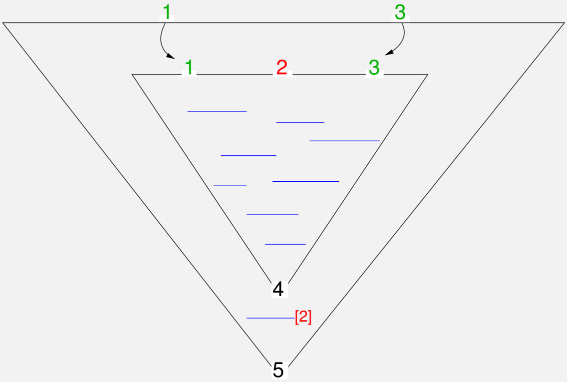
Dans la construction d'un arbre de preuve, le stade où une hypothèse est levée doit être reflété :

- numérotation des hypothèses, convention disponible / [levée]
- report du numéro sur l'inférence qui la lève

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\Rightarrow\mathrm{I}[3]$$

Un arbre de preuve formalise le raisonnement

- aboutissant à la conclusion (formule placée à sa racine),
- sous les hypothèses disponibles (feuilles « encore actives »).



Formulation définitive de $\Rightarrow \mathrm{I}$

Ayant déduit B à partir de A on infère $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{c} \overbrace{A}^{n} \\ \vdots \\ B \end{array}$$

$$\boxed{\dfrac{\begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow \mathrm{I}[n]}$$

Exemple (TRI) :

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B} \Rightarrow \mathrm{E}}{C} \Rightarrow \mathrm{E}}{A \Rightarrow C} \Rightarrow \mathrm{I}[3]$$

Formulation définitive de $\Rightarrow \mathrm{I}$

Ayant déduit B à partir de A on infère $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{c}\overbrace{A}^{n}\\ \vdots \\ B\end{array}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow \mathrm{I}[n]$$

Exemple (TRI) :

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B}\Rightarrow \mathrm{E}}{C}\Rightarrow \mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\Rightarrow \mathrm{I}[3]$$

Formulation définitive de $\Rightarrow \mathrm{I}$

Ayant déduit B à partir de A — on infère $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{c} \overbrace{A}^{n} \\ \vdots \\ B \end{array}$$

$$\boxed{\dfrac{\begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{I}[n]}$$

Exemple (TRI) :

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B} \Rightarrow\mathrm{E}}{C} \Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C} \Rightarrow\mathrm{I}[3]$$

Formulation définitive de $\Rightarrow \mathrm{I}$

Ayant déduit B à partir de A — on infère $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{c} \overbrace{A}^{n} \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad\qquad \boxed{\dfrac{\begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathrm{I}[n]}$$

Exemple (TRI) :

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{B \Rightarrow C}^{2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \Rightarrow B}^{1} \qquad \overbrace{A}^{[3]}}{B}\Rightarrow\mathrm{E}}{C}\Rightarrow\mathrm{E}}{A \Rightarrow C}\Rightarrow\mathrm{I}[3]$$

Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,\wedge E_2 \qquad \cfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,\wedge E_1}{B \wedge A}\,\wedge I}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,\Rightarrow I
$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,\Rightarrow\mathrm{I}$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{B}\,{\scriptstyle \wedge E_2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{1}}{A}\,{\scriptstyle \wedge E_1}}{B \wedge A}\,{\scriptstyle \wedge I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,{\scriptstyle \Rightarrow I[1]}$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\,\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\,\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,\Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

Utilisation multiple d'hypothèses

Une même formule peut éventuellement être placée sur différentes feuilles, tout en étant levée dans une seule inférence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\wedge E_2 \quad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)} \Rightarrow I[1]$$

En général, on peut en avoir un nombre quelconque d'occurrences, y compris 0

Plan du chapitre

Notion de théorème

Définition : *un théorème est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées).*

Exemple : $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$ est un théorème (mais pas $B \wedge A$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\wedge E_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\wedge E_1}{B \wedge A}\wedge I}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\Rightarrow I[1]$$

Notion de théorème

Définition : *un* théorème *est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées).*

Exemple : $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$ est un théorème (mais pas $B \wedge A$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\,{\wedge E_2} \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\,{\wedge E_1}}{B \wedge A}\,{\wedge I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,{\Rightarrow I[1]}$$

Notion de théorème

Définition : *un* *théorème* *est un énoncé pouvant être démontré dans l'environnement vide ; autrement dit, c'est la conclusion d'un arbre de preuve sans hypothèse (c-à-d. où toutes les feuilles correspondent à des hypothèses levées)*.

Exemple : $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$ est un théorème (mais pas $B \wedge A$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[1]}}{A}\wedge\mathrm{E}_1}{B \wedge A}\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]$$

$$\overbrace{A}^{1} = \text{arbre de prv d'hypothèse } A \text{ et de conclusion } A$$

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\overbrace{B}^{[1]}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A} \Rightarrow I[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow I[2]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

$\overbrace{A}^{1}$ = arbre de prv d'hypothèse A et de conclusion A

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$\overbrace{B}^{[1]}$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow\mathrm{I}[2]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\cfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

$\overbrace{A}^{1} =$ arbre de prv d'hypothèse A et de conclusion A

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\overbrace{B}^{[1]}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\ \Rightarrow\mathrm{I}[2]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{I}[1] \qquad \overbrace{A}^{1} =$$ arbre de prv d'hypothèse A et de conclusion A

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\overbrace{B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow\mathrm{I}[2]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\cfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

$$\overbrace{A}^{1} =$$ arbre de prv d'hypothèse A et de conclusion A

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\overbrace{B}^{[1]}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\ \Rightarrow\mathrm{I}[2]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

$\overbrace{A}^{1} =$ arbre de prv d'hypothèse A et de conclusion A

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\overbrace{B}^{[1]}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow\mathrm{I}[2]$$

Quelques théorèmes élémentaires

$A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\overbrace{A}^{[1]}}{A \Rightarrow A}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1] \qquad \overbrace{A}^{1} = \text{arbre de prv d'hypothèse } A \text{ et de conclusion } A$$

$A \Rightarrow B \Rightarrow A$

$$\overbrace{B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \Rightarrow A}\ \Rightarrow\mathrm{I}[1]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\ \Rightarrow\mathrm{I}[2]$$