

# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,  
Grenoble I

2007

# INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,  
Grenoble I

2007

## Cours 1

# Préliminaires

# Plan du chapitre

Présentation du cours

Repères historiques

## Présentation du cours

### Objectifs

### Motivations

# Objectifs

## Savoir faire

- ▶ **Raisonner** clairement, se faire comprendre
- ▶ **Démontrer** proprement, (se) convaincre

## Outils fondamentaux

Langage : formules, déduction naturelle, récurrence

Langages des ensembles : fonctions, relations, structures, ordres

# Objectifs

## Savoir faire

- ▶ **Raisonner** clairement, se faire comprendre
- ▶ **Démontrer** proprement, (se) convaincre

## Outils fondamentaux

Logique, formules, déduction naturelle, récurrence

Ensembles, applications, fonctions, relations, structures, compléments

# Objectifs

## Savoir faire

- ▶ **Raisonner** clairement, se faire comprendre
- ▶ **Démontrer** proprement, (se) convaincre

## Outils fondamentaux



# Objectifs

## Savoir faire

- ▶ **Raisonner** clairement, se faire comprendre
- ▶ **Démontrer** proprement, (se) convaincre

## Outils fondamentaux

- ▶ **Logique** : formules, déduction naturelle, récurrence(s)
- ▶ **Langage des ensembles** : fonctions, relations, structures, ordres

# Objectifs

## Savoir faire

- ▶ **Raisonner** clairement, se faire comprendre
- ▶ **Démontrer** proprement, (se) convaincre

## Outils fondamentaux

- ▶ **Logique** : formules, déduction naturelle, récurrence(s)
- ▶ **Langage des ensembles** : fonctions, relations, structures, ordres

# Objectifs

## Savoir faire

- ▶ **Raisonner** clairement, se faire comprendre
- ▶ **Démontrer** proprement, (se) convaincre

## Outils fondamentaux

- ▶ **Logique** : formules, déduction naturelle, récurrence(s)
- ▶ **Langage des ensembles** : fonctions, relations, structures, ordres

## Présentation du cours

Objectifs

Motivations

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ Structures de données : organisation d'informations
- ▶ Programmes : calculs d'informations
- ▶ Il faut constamment raisonner, expérimenter ne suffit pas
- ▶ Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes

## L'informatique est une science

des ressources nécessaires à leur résolution

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ **Structures de données** : organisation d'informations
- ▶ Programmes : calculs d'informations
- ▶ Il faut constamment raisonner, expérimenter ne suffit pas
- ▶ Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes

L'informatique est une science

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ **Structures de données** : organisation d'informations
- ▶ **Programmes** : calculs d'informations
- ▶ Il faut constamment raisonner, expérimenter ne suffit pas
- ▶ Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes

L'informatique est une science

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ **Structures de données** : organisation d'informations
- ▶ **Programmes** : calculs d'informations
- ▶ **Il faut constamment raisonner**, expérimenter ne suffit pas
- ▶ Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes

L'informatique est une science



# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ **Structures de données** : organisation d'informations
- ▶ **Programmes** : calculs d'informations
- ▶ **Il faut constamment raisonner**, expérimenter ne suffit pas
- ▶ **Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes**

L'informatique est une science

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ Structures de données : organisation d'informations
- ▶ Programmes : calculs d'informations
- ▶ Il faut constamment raisonner, expérimenter ne suffit pas
- ▶ Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes

## L'informatique est une science

- ▶ Étude du sens mathématique des programmes
- ▶ Quantification des ressources nécessaires à leur exécution

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ **Structures de données** : organisation d'informations
- ▶ **Programmes** : calculs d'informations
- ▶ **Il faut constamment raisonner**, expérimenter ne suffit pas
- ▶ **Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes**

## L'informatique est une science

- ▶ **Étude du sens mathématique** des programmes
- ▶ **Quantification** des ressources nécessaires à leur exécution

# Motivations

## Les objets informatiques sont complexes

- ▶ **Structures de données** : organisation d'informations
- ▶ **Programmes** : calculs d'informations
- ▶ **Il faut constamment raisonner**, expérimenter ne suffit pas
- ▶ **Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes**

## L'informatique est une science

- ▶ **Étude du sens mathématique** des programmes
- ▶ **Quantification** des ressources nécessaires à leur exécution

# Plan du chapitre

Présentation du cours

Repères historiques

## Repères historiques

Antiquité : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

19<sup>e</sup> siècle : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

20<sup>e</sup> siècle : création de la logique moderne

→ étude des fondements du raisonnement

## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : création de la logique moderne

→ étude des fondements de l'IA

## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : **création de la logique moderne**



## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : **création de la logique moderne**

- ▶ étude des **fondements du raisonnement**
  - ▶ formalisation de la logique :  
formules logiques, déductions logiques
  - ▶ sémantique (sens) des termes et des formules
  - ▶ théorie de la démonstration
- ▶ naissance des **modèles de calcul** qui serviront plus tard en informatique

## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : **création de la logique moderne**

- ▶ étude des **fondements du raisonnement**
  - ▶ formalisation de la logique :  
formules logiques, déductions logiques
  - ▶ sémantique (sens) des termes et des formules
  - ▶ théorie de la démonstration
- ▶ naissance des **modèles de calcul** qui serviront plus tard en informatique

## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : **création de la logique moderne**

- ▶ étude des **fondements du raisonnement**
  - ▶ formalisation de la logique :  
formules logiques, déductions logiques
  - ▶ sémantique (sens) des termes et des formules
  - ▶ théorie de la démonstration
- ▶ naissance des **modèles de calcul** qui serviront plus tard en informatique

## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : **création de la logique moderne**

- ▶ étude des **fondements du raisonnement**
  - ▶ formalisation de la logique :  
formules logiques, déductions logiques
  - ▶ sémantique (sens) des termes et des formules
  - ▶ théorie de la démonstration
- ▶ naissance des **modèles de calcul** qui serviront plus tard en informatique

## Repères historiques

**Antiquité** : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

**19<sup>e</sup> siècle** : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

**20<sup>e</sup> siècle** : **création de la logique moderne**

- ▶ étude des **fondements du raisonnement**
  - ▶ formalisation de la logique :  
formules logiques, déductions logiques
  - ▶ sémantique (sens) des termes et des formules
  - ▶ théorie de la démonstration
- ▶ naissance des **modèles de calcul** qui serviront plus tard en informatique

## Repères historiques (zoom)

### Théorie naïve des ensembles (fin 19<sup>e</sup>)

Construire toutes les mathématiques à partir

- ▶ des entiers (Peano)  $\Rightarrow$  insuffisant
- ▶ des ensembles (Cantor)  $\Rightarrow$  paradoxes, crise des fondements

### Naissance de la logique moderne (20<sup>e</sup>)

Premiers pas 1900 – 1910

Objectif : sauver les meubles

- ▶ théorie axiomatique des ensembles (Zermelo, Fraenkel,...)
- ▶ théorie des types (Russell)

## Repères historiques (zoom)

### Théorie naïve des ensembles (fin 19<sup>e</sup>)

Construire toutes les mathématiques à partir

- ▶ des entiers (Peano)  $\Rightarrow$  insuffisant
- ▶ des ensembles (Cantor)  $\Rightarrow$  paradoxes, crise des fondements

### Naissance de la logique moderne (20<sup>e</sup>)

Premiers pas 1900 – 1910

Objectif : sauver les meubles

- ▶ théorie axiomatique des ensembles (Zermelo, Fraenkel,...)
- ▶ théorie des types (Russell)

## Repères historiques (zoom)

### Théorie naïve des ensembles (fin 19<sup>e</sup>)

Construire toutes les mathématiques à partir

- ▶ des entiers (Peano)  $\Rightarrow$  insuffisant
- ▶ des ensembles (Cantor)  $\Rightarrow$  paradoxes, crise des fondements

### Naissance de la logique moderne (20<sup>e</sup>)

Premiers pas 1900 – 1910

Objectif : sauver les meubles

- ▶ théorie axiomatique des ensembles (Zermelo, Fraenkel,...)
- ▶ théorie des types (Russell)



## Repères historiques (zoom)

### Théorie naïve des ensembles (fin 19<sup>e</sup>)

Construire toutes les mathématiques à partir

- ▶ des entiers (Peano)  $\Rightarrow$  insuffisant
- ▶ des ensembles (Cantor)  $\Rightarrow$  paradoxes, crise des fondements

### Naissance de la logique moderne (20<sup>e</sup>)

#### Premiers pas 1900 – 1910

Objectif : sauver les meubles

- ▶ théorie axiomatique des ensembles (Zermelo, Fraenkel,...)
- ▶ théorie des types (Russell)

## Repères historiques (zoom suite)

### Années 20

- ▶ programme de Hilbert : sécuriser les mathématiques (à commencer par le principe de récurrence) sur des bases **finies**
- ▶ intuitionnisme (Brouwer) : démonstrations **constructives**

### Années 30

Échec du programme de Hilbert (1932) :  
théorèmes d'incomplétude de **Gödel**

Modèles de calcul : lambda-calcul (Church), fonctions récursives (Herbrand, Gödel), machines de Turing

+ théorie de la démonstration (Herbrand, Gödel, Gentzen)

+ théorie des modèles (Tarski)

## Repères historiques (zoom suite)

### Années 20

- ▶ programme de Hilbert : sécuriser les mathématiques (à commencer par le principe de récurrence) sur des bases **finies**
- ▶ intuitionnisme (Brouwer) : démonstrations **constructives**

### Années 30

Échec du programme de Hilbert (1932) :  
théorèmes d'incomplétude de Gödel

Modèles de calcul : lambda-calcul (Church), fonctions récursives (Herbrand, Gödel), machines de Turing  
+ théorie de la démonstration (Herbrand, Gödel, Gentzen)  
+ théorie des modèles (Tarski)

## Repères historiques (zoom suite)

### Années 20

- ▶ programme de Hilbert : sécuriser les mathématiques (à commencer par le principe de récurrence) sur des bases **finies**
- ▶ intuitionnisme (Brouwer) : démonstrations **constructives**

### Années 30

Échec du programme de Hilbert (1932) :  
théorèmes d'incomplétude de **Gödel**

Modèles de calcul : lambda-calcul (Church), fonctions récursives (Herbrand, Gödel), machines de Turing  
+ théorie de la démonstration (Herbrand, Gödel, Gentzen)  
+ théorie des modèles (Tarski)

## Repères historiques (zoom suite)

### Années 20

- ▶ programme de Hilbert : sécuriser les mathématiques (à commencer par le principe de récurrence) sur des bases **finies**
- ▶ intuitionnisme (Brouwer) : démonstrations **constructives**

### Années 30

Échec du programme de Hilbert (1932) :  
théorèmes d'incomplétude de **Gödel**

**Modèles de calcul** : lambda-calcul (Church), fonctions récursives (Herbrand, Gödel), machines de Turing

+ théorie de la démonstration (Herbrand, Gödel, Gentzen)

+ théorie des modèles (Tarski)

## Repères historiques (zoom suite)

### Années 20

- ▶ programme de Hilbert : sécuriser les mathématiques (à commencer par le principe de récurrence) sur des bases **finies**
- ▶ intuitionnisme (Brouwer) : démonstrations **constructives**

### Années 30

Échec du programme de Hilbert (1932) :  
théorèmes d'incomplétude de **Gödel**

**Modèles de calcul** : lambda-calcul (Church), fonctions récursives (Herbrand, Gödel), machines de Turing  
+ théorie de la démonstration (Herbrand, Gödel, Gentzen)  
+ théorie des modèles (Tarski)

# Repères historiques : à retenir

## Quelques résultats surprenants

Certaines tâches sont irréalisables par des programmes

## Outils fondamentaux de l'informatique

Nés au moins 10 ans avant le premier ordinateur

## Développements poussés de la logique formelle

Bien plus importants pour l'informaticien que pour le mathématicien

- ▶ en mathématiques, il suffit de savoir qu'**en principe** un raisonnement pourrait être rédigé complètement comme une suite de formules ; en pratique on fait confiance aux confrères ;
- ▶ en informatique :
  - ▶ clarification de notions essentielles pour exprimer calculs et structures de données
  - ▶ raisonnements compliqués, nécessité de **vérifier** (voire produire) **automatiquement** ceux qui sont critiques  
⇒ ils doivent être **formels**

# Repères historiques : à retenir

## Quelques résultats surprenants

Certaines tâches sont irréalisables par des programmes

## Outils fondamentaux de l'informatique

Nés au moins 10 ans avant le premier ordinateur

## Développements poussés de la logique formelle

Bien plus importants pour l'informaticien que pour le mathématicien

- ▶ en mathématiques, il suffit de savoir qu'**en principe** un raisonnement pourrait être rédigé complètement comme une suite de formules ; en pratique on fait confiance aux confrères ;
- ▶ en informatique :
  - ▶ clarification de notions essentielles pour exprimer calculs et structures de données
  - ▶ raisonnements compliqués, nécessité de **vérifier** (voire produire) **automatiquement** ceux qui sont critiques  
⇒ ils doivent être **formels**



# Repères historiques : à retenir

## Quelques résultats surprenants

Certaines tâches sont irréalisables par des programmes

## Outils fondamentaux de l'informatique

Nés au moins 10 ans avant le premier ordinateur

## Développements poussés de la logique formelle

Bien plus importants pour l'informaticien que pour le mathématicien

- ▶ en mathématiques, il suffit de savoir qu'**en principe** un raisonnement pourrait être rédigé complètement comme une suite de formules ; en pratique on fait confiance aux confrères ;
- ▶ en informatique :
  - ▶ clarification de notions essentielles pour exprimer calculs et structures de données
  - ▶ raisonnements compliqués, nécessité de **vérifier** (voire produire) **automatiquement** ceux qui sont critiques  
⇒ ils doivent être **formels**

# Repères historiques : à retenir

## Quelques résultats surprenants

Certaines tâches sont irréalisables par des programmes

## Outils fondamentaux de l'informatique

Nés au moins 10 ans avant le premier ordinateur

## Développements poussés de la logique formelle

Bien plus importants pour l'informaticien que pour le mathématicien

- ▶ en mathématiques, il suffit de savoir qu'**en principe** un raisonnement pourrait être rédigé complètement comme une suite de formules ; en pratique on fait confiance aux confrères ;
- ▶ en informatique :
  - ▶ clarification de notions essentielles pour exprimer calculs et structures de données
  - ▶ raisonnements compliqués, nécessité de **vérifier** (voire produire) **automatiquement** ceux qui sont critiques  
⇒ ils doivent être **formels**

# Repères historiques : à retenir

## Quelques résultats surprenants

Certaines tâches sont irréalisables par des programmes

## Outils fondamentaux de l'informatique

Nés au moins 10 ans avant le premier ordinateur

## Développements poussés de la logique formelle

Bien plus importants pour l'informaticien que pour le mathématicien

- ▶ en mathématiques, il suffit de savoir qu'**en principe** un raisonnement pourrait être rédigé complètement comme une suite de formules ; en pratique on fait confiance aux confrères ;
- ▶ en informatique :
  - ▶ clarification de notions essentielles pour exprimer calculs et structures de données
  - ▶ raisonnements compliqués, nécessité de **vérifier** (voire produire) **automatiquement** ceux qui sont critiques  
⇒ ils doivent être **formels**

# Introduction

# Plan du chapitre

Quelques raisonnements simples

Arbres de déduction

Exemples formalisés

## Quelques raisonnements simples

Le gruyère

La route

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?



## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

## Le gruyère

### Un raisonnement (pas si) bien connu

- ▶ *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- ▶ *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- ▶ *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- ▶ *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

**Oui !**

## Quelques raisonnements simples

Le gruyère

La route

# La route (1)

## Premier raisonnement

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Donc une route verglassée est dangereuse.*



# La route (1)

## Premier raisonnement

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Donc une route verglassée est dangereuse.*

# La route (1)

## Premier raisonnement

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Donc une route verglassée est dangereuse.*

# La route (1)

## Premier raisonnement

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Donc une route verglassée est dangereuse.*

## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc** une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse.*



## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc*** *une route verglassée* ***ou*** *enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse.*

## La route (2)

### Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse.*

## La route (3)

### Troisième raisonnement

Mêmes hypothèses et même conclusion que pour le second.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc** une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;  
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;  
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une  
route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (3)

### Troisième raisonnement

Mêmes hypothèses et même conclusion que pour le second.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc** une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;  
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;  
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une  
route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (3)

### Troisième raisonnement

Mêmes hypothèses et même conclusion que pour le second.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*  
*En effet, si elle est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;*  
*si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;*  
*elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une*  
*route verglassée ou enneigée est dangereuse.*

## La route (4)

### Quatrième raisonnement

Mêmes hypothèses mais conclusion différente.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ **Donc** *une route verglassée et enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.*

*Variante (autre raisonnement)*

*si elle est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.*

## La route (4)

### Quatrième raisonnement

Mêmes hypothèses mais conclusion différente.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc** une route verglassée **et** enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.*

*Variante (autre raisonnement)*

*si elle est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.*

## La route (4)

### Quatrième raisonnement

Mêmes hypothèses mais conclusion différente.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc** une route verglassée **et** enneigée est dangereuse.*

*En effet, si elle est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.*

*Variante (autre raisonnement)*

*si elle est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.*



## La route (4)

### Quatrième raisonnement

Mêmes hypothèses mais conclusion différente.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ ***Donc** une route verglassée **et** enneigée est dangereuse.*  
*En effet, si elle est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.*

*Variante (autre raisonnement)*

*si elle est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.*

## La route (4)

### Quatrième raisonnement

Mêmes hypothèses mais conclusion différente.

- ▶ *Une route verglassée est glissante.*
- ▶ *Une route glissante est dangereuse.*
- ▶ *Une route enneigée est glissante.*
- ▶ *Donc une route verglassée et enneigée est dangereuse.*  
*En effet, si elle est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.*  
*Variante (autre raisonnement)*  
*si elle est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.*

# Plan du chapitre

Quelques raisonnements simples

Arbres de déduction

Exemples formalisés

## Arbres de déduction

### Ingrédients

Présentation textuelle

Présentation formelle

Arbres

Exemple d'inférence formelle

Décomposition logique des énoncés

Exercice

# Ingrédients

On a des énoncés.

Certains énoncés sont admis : hypothèses.

Certains énoncés sont déduits des autres :

inférence = règle « de prémisses vers conclusion »

Les déductions s'emboîtent les unes dans les autres :  
les conclusions de certaines étapes de déduction  
servent de prémisses aux étapes suivantes.

déduction = emboîtement d'inférences

Comment présenter des déductions ?

## Ingrédients

On a des **énoncés**.

Certains énoncés sont admis : **hypothèses**.

Certains énoncés sont déduits des autres :

**inférence = règle « de prémisses vers conclusion »**

Les déductions s'**emboîtent** les unes dans les autres :  
les conclusions de certaines étapes de déduction  
servent de prémisses aux étapes suivantes.

**déduction = emboîtement d'inférences**

Comment présenter des déductions ?

## Ingrédients

On a des **énoncés**.

Certains énoncés sont admis : **hypothèses**.

Certains énoncés sont déduits des autres :

inférence = règle « de prémisses vers conclusion »

Les déductions s'**emboîtent** les unes dans les autres :  
les conclusions de certaines étapes de déduction  
servent de prémisses aux étapes suivantes.

déduction = emboîtement d'inférences

Comment présenter des déductions ?

## Ingrédients

On a des **énoncés**.

Certains énoncés sont admis : **hypothèses**.

Certains énoncés sont déduits des autres :

**inférence = règle « de prémisses vers conclusion »**

Les déductions s'**emboîtent** les unes dans les autres :  
les conclusions de certaines étapes de déduction  
servent de prémisses aux étapes suivantes.

**déduction = emboîtement d'inférences**

Comment présenter des déductions ?



## Ingrédients

On a des **énoncés**.

Certains énoncés sont admis : **hypothèses**.

Certains énoncés sont déduits des autres :

**inférence = règle « de prémisses vers conclusion »**

Les déductions s'**emboîtent** les unes dans les autres :  
les conclusions de certaines étapes de déduction  
servent de prémisses aux étapes suivantes.

**déduction = emboîtement d'inférences**

Comment présenter des déductions ?

## Ingrédients

On a des **énoncés**.

Certains énoncés sont admis : **hypothèses**.

Certains énoncés sont déduits des autres :

**inférence = règle « de prémisses vers conclusion »**

Les déductions s'**emboîtent** les unes dans les autres :  
les conclusions de certaines étapes de déduction  
servent de prémisses aux étapes suivantes.

**déduction = emboîtement d'inférences**

Comment présenter des déductions ?

## Arbres de déduction

Ingrédients

**Présentation textuelle**

Présentation formelle

Arbres

Exemple d'inférence formelle

Décomposition logique des énoncés

Exercice

## Présentation usuelle : texte informel

**Exemples** : voir planches précédentes

**Avantage** : facile à lire (aucun apprentissage)

Inconvénients :

- ▶ pas toujours facile à écrire
- ▶ ellipses (parties implicites), risques d'omissions

## Présentation usuelle : texte informel

**Exemples** : voir planches précédentes

**Avantage** : facile à lire (aucun apprentissage)

**Inconvénients** :

- ▶ pas toujours facile à écrire
- ▶ ellipses (parties implicites), risques d'omissions

## Arbres de déduction

Ingrédients

Présentation textuelle

**Présentation formelle**

Arbres

Exemple d'inférence formelle

Décomposition logique des énoncés

Exercice

# Présentation formelle, et précise : fractions

## Inférence simple

$$\frac{\text{prémisse}_1 \quad \text{prémisse}_2}{\text{conclusion}}$$

Déduction = emboîtement d'inférences = arbre de preuve

$$\frac{\frac{\text{prémisse}_1 \quad \text{prémisse}_2}{\text{conclusion}_1} \quad \frac{\text{prémisse}_3 \quad \text{prémisse}_4}{\text{conclusion}_2}}{\text{conclusion}_3}$$

# Présentation formelle, et précise : fractions

## Inférence simple

$$\frac{\text{prémisse}_1 \quad \text{prémisse}_2}{\text{conclusion}}$$

Déduction = emboîtement d'inférences = **arbre de preuve**

$$\frac{\frac{\text{prémisse}_1 \quad \text{prémisse}_2}{\text{conclusion}_1} \quad \frac{\text{prémisse}_3 \quad \text{prémisse}_4}{\text{conclusion}_2}}{\text{conclusion}_3}$$



## Arbres de déduction

Ingrédients

Présentation textuelle

Présentation formelle

**Arbres**

Exemple d'inférence formelle

Décomposition logique des énoncés

Exercice

# Intermède : arbres

## Intuitivement

- ▶ une **feuille** est un arbre  
un **nœud** relié à des arbres déjà construits est un nouvel arbre  
il n'y a pas d'autre moyen de former des arbres
- ▶ chaque nœud ou feuille est muni d'une **étiquette**  
étiquette = nom, formule logique, ou autre

## En informatique : objets couramment manipulés

- ▶ Représentables en machine (ex. pointeurs ou tableaux)
- ▶ cf. fin INF 121

## Mathématiquement

- ▶ Définition précise possible à l'aide de fonctions (fin INF122 ?)

# Intermède : arbres

## Intuitivement

- ▶ une **feuille** est un arbre  
un **nœud** relié à des arbres déjà construits est un nouvel arbre  
il n'y a pas d'autre moyen de former des arbres
- ▶ chaque nœud ou feuille est muni d'une **étiquette**  
étiquette = nom, formule logique, ou autre

## En informatique : objets couramment manipulés

- ▶ Représentables en machine (ex. pointeurs ou tableaux)
- ▶ cf. fin INF 121

## Mathématiquement

- ▶ Définition précise possible à l'aide de fonctions (fin INF122 ?)

# Intermède : arbres

## Intuitivement

- ▶ une **feuille** est un arbre  
un **nœud** relié à des arbres déjà construits est un nouvel arbre  
il n'y a pas d'autre moyen de former des arbres
- ▶ chaque nœud ou feuille est muni d'une **étiquette**  
étiquette = nom, formule logique, ou autre

## En informatique : objets couramment manipulés

- ▶ Représentables en machine (ex. pointeurs ou tableaux)
- ▶ cf. fin INF 121

## Mathématiquement

- ▶ Définition précise possible à l'aide de fonctions (fin INF122 ?)

## Arbres de déduction

Ingrédients

Présentation textuelle

Présentation formelle

Arbres

**Exemple d'inférence formelle**

Décomposition logique des énoncés

Exercice

## Exemple d'inférence formelle

*une route verglassée est glissante*      *une route glissante est dangereuse*  
-----  
*une route verglassée est dangereuse*

C'est bien une inférence, mais ce n'est pas une inférence logique :  
comment justifier le passage des prémisses à la conclusion ?

Il faut analyser la *structure logique* des énoncés tels que  
*une route verglassée est glissante*

## Exemple d'inférence formelle

*une route verglassée est glissante*      *une route glissante est dangereuse*  
-----  
*une route verglassée est dangereuse*

C'est bien une inférence, mais ce n'est pas une inférence logique :  
comment justifier le passage des prémisses à la conclusion ?

Il faut analyser la *structure logique* des énoncés tels que  
*une route verglassée est glissante*

## Exemple d'inférence formelle

$$\frac{\textit{une route verglassée est glissante} \quad \textit{une route glissante est dangereuse}}{\textit{une route verglassée est dangereuse}}$$

C'est bien une inférence, mais ce n'est pas une inférence logique : comment justifier le passage des prémisses à la conclusion ?

Il faut analyser la *structure logique* des énoncés tels que *une route verglassée est glissante*



## Arbres de déduction

Ingrédients

Présentation textuelle

Présentation formelle

Arbres

Exemple d'inférence formelle

**Décomposition logique des énoncés**

Exercice

## Décomposition logique des énoncés

Simplification provisoire : il n'y a qu'une route, *la route*

Énoncés élémentaires (atomiques)

- ▶ *la route est verglassée*
- ▶ *la route est enneigée*
- ▶ *la route est glissante*
- ▶ *la route est dangereuse*

Exemple

*une route verglassée est glissante*

*la route est verglassée  $\Rightarrow$  la route est glissante*

$\Rightarrow$  est un **connecteur logique** qui se lit : **implique**

## Décomposition logique des énoncés

Simplification provisoire : il n'y a qu'une route, *la route*

### Énoncés élémentaires (atomiques)

- ▶ *la route est verglassée*
- ▶ *la route est enneigée*
- ▶ *la route est glissante*
- ▶ *la route est dangereuse*

### Exemple

*une route verglassée est glissante*

*la route est verglassée  $\Rightarrow$  la route est glissante*

$\Rightarrow$  est un **connecteur logique** qui se lit : **implique**

## Décomposition logique des énoncés

Simplification provisoire : il n'y a qu'une route, *la route*

### Énoncés élémentaires (atomiques)

- ▶ *la route est verglassée*
- ▶ *la route est enneigée*
- ▶ *la route est glissante*
- ▶ *la route est dangereuse*

### Exemple

*une route verglassée est glissante*

*la route est verglassée*  $\Rightarrow$  *la route est glissante*

$\Rightarrow$  est un connecteur logique qui se lit : implique

## Décomposition logique des énoncés

Simplification provisoire : il n'y a qu'une route, *la route*

### Énoncés élémentaires (atomiques)

- ▶ *la route est verglassée*
- ▶ *la route est enneigée*
- ▶ *la route est glissante*
- ▶ *la route est dangereuse*

### Exemple

*une route verglassée est glissante*

*la route est verglassée*  $\Rightarrow$  *la route est glissante*

$\Rightarrow$  est un **connecteur logique** qui se lit : **implique**

## Arbres de déduction

Ingrédients

Présentation textuelle

Présentation formelle

Arbres

Exemple d'inférence formelle

Décomposition logique des énoncés

**Exercice**

## Exercice

*une route verglassée est glissante      une route glissante est dangereuse*  
*une route verglassée est dangereuse*

Reformuler cet arbre en posant :

*rv = la route est verglassée      re = la route est enneigée*

*rg = la route est glissante      rd = la route est dangereuse*

Justifier

► TRI : transitivité de l'implication

## Exercice

*une route verglassée est glissante      une route glissante est dangereuse*  
*une route verglassée est dangereuse*

Reformuler cet arbre en posant :

*rv = la route est verglassée      re = la route est enneigée*

*rg = la route est glissante      rd = la route est dangereuse*

Justifier

► TRI : transitivité de l'implication



## Exercice

$$\frac{\text{une route verglassée est glissante} \quad \text{une route glissante est dangereuse}}{\text{une route verglassée est dangereuse}}$$

Reformuler cet arbre en posant :

$rv =$  la route est verglassée     $re =$  la route est enneigée

$rg =$  la route est glissante     $rd =$  la route est dangereuse

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Justifier

► TRI : transitivité de l'implication

## Exercice

$$\frac{\text{une route verglassée est glissante} \quad \text{une route glissante est dangereuse}}{\text{une route verglassée est dangereuse}}$$

Reformuler cet arbre en posant :

$rv =$  la route est verglassée     $re =$  la route est enneigée

$rg =$  la route est glissante     $rd =$  la route est dangereuse

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Justifier

- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## Exercice

$$\frac{\text{une route verglassée est glissante} \quad \text{une route glissante est dangereuse}}{\text{une route verglassée est dangereuse}}$$

Reformuler cet arbre en posant :

$rv =$  la route est verglassée     $re =$  la route est enneigée

$rg =$  la route est glissante     $rd =$  la route est dangereuse

$$\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Justifier

- ▶ **TRI** : transitivité de l'implication

# Plan du chapitre

Quelques raisonnements simples

Arbres de déduction

Exemples formalisés

## Exemples formalisés

La route (2)

Forme générale d'un arbre de preuve

La route (3)

La route (4)

Gruyère : le retour

## La route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante **dans les deux cas**, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse

Nouveau connecteur logique :  $\vee$  qui se lit ou

$$\frac{\frac{rv \Rightarrow rg \quad re \Rightarrow rg}{(rv \vee re) \Rightarrow rg} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \vee re) \Rightarrow rd}$$

## La route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante **dans les deux cas**, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse

Nouveau **connecteur logique** :  $\vee$  qui se lit **ou**

$$\frac{\frac{rv \Rightarrow rg \quad re \Rightarrow rg}{(rv \vee re) \Rightarrow rg} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \vee re) \Rightarrow rd}$$

## La route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante **dans les deux cas**, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse

Nouveau **connecteur logique** :  $\vee$  qui se lit **ou**

$$\frac{\frac{rv \Rightarrow rg \quad re \Rightarrow rg}{(rv \vee re) \Rightarrow rg} \text{ OGI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \vee re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

### Justification

- ▶ OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication



## La route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante **dans les deux cas**, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée **ou** enneigée est dangereuse

Nouveau **connecteur logique** :  $\vee$  qui se lit **ou**

$$\frac{\frac{rv \Rightarrow rg \quad re \Rightarrow rg}{(rv \vee re) \Rightarrow rg} \text{ OGI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \vee re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

### Justification

- ▶ OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## La route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse

Nouveau connecteur logique :  $\vee$  qui se lit ou

$$\frac{\frac{rv \Rightarrow rg \quad re \Rightarrow rg}{(rv \vee re) \Rightarrow rg} \text{ OGI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \vee re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

### Justification

- ▶ OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## Exemples formalisés

La route (2)

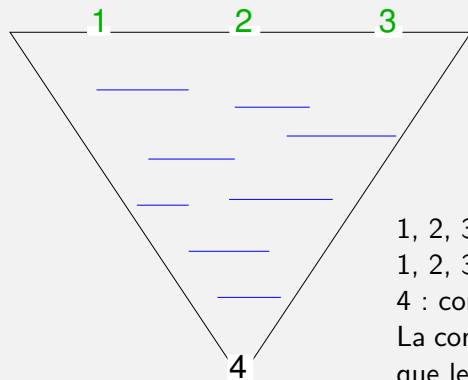
**Forme générale d'un arbre de preuve**

La route (3)

La route (4)

Gruyère : le retour

## Forme générale d'un arbre de preuve



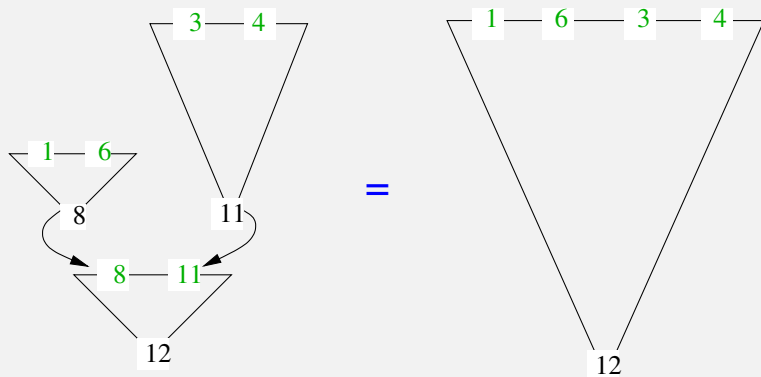
1, 2, 3, 4 : énoncés

1, 2, 3 : hypothèses

4 : conclusion

La conclusion est bonne pourvu  
que les hypothèses le soient

# Assemblage d'arbres de preuve





## Exemples formalisés

La route (2)

Forme générale d'un arbre de preuve

**La route (3)**

La route (4)

Gruyère : le retour

## La route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;  
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;  
elle est donc dangereuse **dans les deux cas**, ce qui signifie qu'une route  
verglassée ou enneigée est dangereuse.

### Justification

- ▶ OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication



## La route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;  
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;  
elle est donc dangereuse **dans les deux cas**, ce qui signifie qu'une route  
verglassée ou enneigée est dangereuse.

### Justification

- ▶ OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## La route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;  
 si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;  
 elle est donc dangereuse **dans les deux cas**, ce qui signifie qu'une route  
 verglassée ou enneigée est dangereuse.

$$\frac{\frac{rv \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{rv \Rightarrow rd} \text{ TRI} \quad \frac{re \Rightarrow rg \quad rg \Rightarrow rd}{re \Rightarrow rd} \text{ TRI}}{(rv \vee re) \Rightarrow rd} \text{ OGI}$$

### Justification

- ▶ OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## Exemples formalisés

La route (2)

Forme générale d'un arbre de preuve

La route (3)

**La route (4)**

Gruyère : le retour

## La route (4)

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Nouveau connecteur logique :  $\wedge$  qui se lit **et**

$$\frac{\frac{(rv \wedge re) \Rightarrow rv \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd}$$

→ Règle de la chaîne d'une implication

→ Règle de transitivité de l'implication

## La route (4)

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Nouveau **connecteur logique** :  $\wedge$  qui se lit **et**

$$\frac{\frac{(rv \wedge re) \Rightarrow rv \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd}$$

Catégorie d'une implication

Propriété de l'implication

## La route (4)

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Nouveau **connecteur logique** :  $\wedge$  qui se lit **et**

$$\frac{\frac{\frac{}{(rv \wedge re) \Rightarrow rv} \text{ EGI}_1 \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}}$$

### Justification

- ▶ EGI : Et à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## La route (4)

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Nouveau **connecteur logique** :  $\wedge$  qui se lit **et**

$$\frac{\frac{\overline{(rv \wedge re) \Rightarrow rv} \quad \text{EGI}_1 \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \quad \text{TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \quad \text{TRI}$$

### Justification

- ▶ EGI : Et à Gauche d'une Implication
- ▶ TRI : transitivité de l'implication

## La route (4)

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Nouveau **connecteur logique** :  $\wedge$  qui se lit **et**

$$\frac{\frac{\frac{}{(rv \wedge re) \Rightarrow rv} \text{ EGI}_1 \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}}$$

### Justification

- ▶ **EGI** : Et à Gauche d'une Implication
- ▶ **TRI** : transitivité de l'implication



## La route (4), variantes

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\overline{\quad} \text{ EGI}_1}{(rv \wedge re) \Rightarrow rv} \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

## La route (4), variantes

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\frac{}{\text{EGI}_1} \quad (rv \wedge re) \Rightarrow rv \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

## La route (4), variantes

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\frac{}{\text{EGI}_1} \quad (rv \wedge re) \Rightarrow rv \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

## La route (4), variantes

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\frac{}{\text{EGI}_1} \quad (rv \wedge re) \Rightarrow rv \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\frac{}{\text{EGI}_2} \quad (rv \wedge re) \Rightarrow re \quad re \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

## La route (4), variantes

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\text{----- EGI}_1}{(rv \wedge re) \Rightarrow rv} \quad rv \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

Si la route est verglassée **et** enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\frac{\frac{\text{----- EGI}_2}{(rv \wedge re) \Rightarrow re} \quad re \Rightarrow rg}{(rv \wedge re) \Rightarrow rg} \text{ TRI} \quad rg \Rightarrow rd}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd} \text{ TRI}$$

## Exemples formalisés

La route (2)

Forme générale d'un arbre de preuve

La route (3)

La route (4)

Gruyère : le retour

## Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère

Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère =  $pg$

Il y a plus de trous =  $pt$

Il y a moins de gruyère =  $mg$

Preuve

## Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère

### Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère =  $pg$

Il y a plus de trous =  $pt$

Il y a moins de gruyère =  $mg$

### Preuve



## Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère

### Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère =  $pg$

Il y a plus de trous =  $pt$

Il y a moins de gruyère =  $mg$

### Preuve

Compléter

## Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère

### Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère =  $pg$

Il y a plus de trous =  $pt$

Il y a moins de gruyère =  $mg$

### Preuve

Compléter

## Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

### Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère =  $pg$

Il y a plus de trous =  $pt$

Il y a moins de gruyère =  $mg$

### Preuve

Compléter

## Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

### Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère =  $pg$

Il y a plus de trous =  $pt$

Il y a moins de gruyère =  $mg$

### Preuve

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte (on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ **les prémisses sont contradictoires**
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte (on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ les prémisses sont contradictoires
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte (on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ les prémisses sont contradictoires
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte (on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ les prémisses sont contradictoires
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*



## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte  
(on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ les prémisses sont contradictoires
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte  
(on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ **les prémisses sont contradictoires**
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte (on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ **les prémisses sont contradictoires**
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*

## Gruyère : où est le problème ?

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous =  $pg \Rightarrow pt$

Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère =  $pt \Rightarrow mg$

Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère =  $pg \Rightarrow mg$

$$\frac{pg \Rightarrow pt \quad pt \Rightarrow mg}{pg \Rightarrow mg} \text{ TRI}$$

- ▶ on a un raisonnement *sous hypothèses* :  
si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- ▶ l'inférence logique est correcte
- ▶ chaque hypothèse, prise séparément, est correcte  
(on peut raisonner avec)
- ▶ la conclusion est manifestement incorrecte
- ▶ **les prémisses sont contradictoires**
  - ▶ la première : exacte à *densité constante*
  - ▶ la seconde : exacte à *volume constant*