# INF122 2008-2009 – TD série 9

## Exercice 1

Donner les propriétés de relations suivantes parmi les 6 possibles (réflexive, irréflexive, symétrique, anti-symétrique, asymétrique, transitive) :

1. la relation d'égalité sur les entiers,

   **Corrigé**

   réflexive, symétrique, transitive
2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites du plan,

   **Corrigé**

   irrréflexive,
3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites,

   **Corrigé**

   réflexive, symétrique, transitive
4. la relation "est le carré de" sur les entiers.

   **Corrigé**

   anti-symétrique

En déduire lesquelles sont des ordres et lesquelles sont des relations d'équivalence.

**Corrigé**

La première.

## Exercice 2

Explicitez toutes les relations d'équivalence et toutes les relations d'ordre sur $\{a, b, c\}$. Donnez l'ensemble quotient des relations d'équivalences.

## Exercice 3

Soient les relations définies comme suit :
– $R_1 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}^{*2} \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}$
– $R_2 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}^{*2} \mid x_1 y_2 < x_2 y_1\}$
– $R_3 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}^{*2} \mid x_1 y_2 \geq x_2 y_1\}$
Lesquelles sont des ordres ? des relations d'équivalence ?
Rappel : $\mathbb{N}^* \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$

**Corrigé**

Equivalence : $R_1$. Ordre : $R_2$ et $R_3$

## Exercice 4

Démontrer qu'une relation totale (définie partout), symétrique et transitive est réflexive.

**Corrigé**

(Indications). Soit $A$ un ensemble et $R$ une relation symétrique, transitive et totale. Soit $a$ un élément quelconque de $A$. Comme $R$ est totale il existe un élément $b$ de $A$ tel que $(a, b) \in R$. Comme $R$ est symétrique, on a alors $(b, a) \in R$, puis par transitivité $(a, a) \in R$. On en déduit $\forall x \ x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$, cqfd.
L'arbre de preuve est de taille raisonnable : moins de 10 étages, et encore plus raisonnable si on prend des règles raccourcies pour la réflexivité, la symétrie et la transitivité (non présentées dans la version actuelle du cours).

## Exercice 5

1. Démontrez que l'inverse d'une relation d'ordre est aussi une relation d'ordre.
2. Démontrez que l'inverse d'une relation d'équivalence est aussi une relation d'équivalence.

**Corrigé**

On démontre que l'inverse d'une relation réflexive (respectivement symétrique, anti-symétrique, transitive) est elle-même réflexive (respectivement symétrique, anti-symétrique, transitive).
Réflexivité : on utilise $(x, x) \in R^{-1} \overset{\text{déf}}{=\!=} (x, x) \in R$ )
Symétrie : soit $(x, y)$ un couple arbitraire de $R^{-1}$ ; par définition de $R^{-1}$, on a $(y, x) \in R$ ; par symétrie de $R$, on en déduit $(x, y) \in R$, c-à-d. $(y, x) \in R^{-1}$, cqfd.
Transitivité et anti-symétrie : même démarche.

## Exercice 6

Démontrez les assertions suivantes :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$

**Corrigé**

Associativité de $\circ$ : il faut démontrer qu'étant donné trois relations $R, S, T$ arbitraires, $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. Comme $(R \circ S) \circ T$ et $R \circ (S \circ T)$ sont des **ensembles** (de couples), on utilise l'extensionalité. Autrement dit on démontre $\forall ( \ x, y), (x, y) \in (R \circ S) \circ T \iff (x, y) \in R \circ (S \circ T)$. Dans ce corrigé on démontre juste $\forall ( \ x, y), (x, y) \in (R \circ S) \circ T \Rightarrow (x, y) \in R \circ (S \circ T)$, la réciproque étant similaire. Soient donc $x$ et $y$ arbitraires tels que $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$. Par définition de $\circ$, on a $\exists b, (x, b) \in R \circ S \wedge (b, y) \in T$. Soit donc $b_0$ arbitraire vérifiant $(x, b_0) \in R \circ S$ (1)
et $(b_0, y) \in T$. (2)
Par définition de $\circ$ dans (1), on a $\exists a, (x, a) \in R \wedge (a, b) \in S$. Soit donc $a_0$ arbitraire vérifiant
$(x, a_0) \in R$ (3)
et $(a_0, b_0) \in S$. (4)
De (4) et (2) et de la définition de $\circ$, on déduit $(a_0, y) \in S \circ T$. (5)
De (3) et (5) et de la définition de $\circ$, on déduit $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$, cqfd.
Il esrt conseillé de fabriquer l'arbre de preuve : bon exercice sur $\exists_E$