INF122 2008-2009 – TD série 9

Exercice 1

Donner les propriétés de relations suivantes parmi les 6 possibles (réflexive, irréflexive, symétrique, anti-symétrique, asymétrique, transitive) :

1. la relation d'égalité sur les entiers,
2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites du plan,
3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites,
4. la relation "est le carré de" sur les entiers.

En déduire lesquelles sont des ordres et lesquelles sont des relations d'équivalence.

Exercice 2

Explicitez toutes les relations d'équivalence et toutes les relations d'ordre sur $\{a, b, c\}$. Donnez l'ensemble quotient des relations d'équivalences.

Exercice 3

Soient les relations définies comme suit :
– $R_1 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}^{*2} \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}$
– $R_2 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}^{*2} \mid x_1 y_2 < x_2 y_1\}$
– $R_3 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}^{*2} \mid x_1 y_2 \geq x_2 y_1\}$
Lesquelles sont des ordres ? des relations d'équivalence ?
Rappel : $\mathbb{N}^* \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Exercice 4

Démontrer qu'une relation totale (définie partout), symétrique et transitive est réflexive.

Exercice 5

1. Démontrez que l'inverse d'une relation d'ordre est aussi une relation d'ordre.
2. Démontrez que l'inverse d'une relation d'équivalence est aussi une relation d'équivalence.

Exercice 6

Démontrez les assertions suivantes :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive : $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$