INF122 2008-2009 – TD série 7

Vous porterez le plus grand soin à appliquer les règles d'inférences **telles qu'elles sont énoncées dans votre cours**.

Exercice 1

Démontrez en déduction naturelle, en écrivant l'arbre de preuve et le style textuel, la proposition logique suivante :
$A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B$

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{a \in A}^{[2]}}{a \in A \cup B}\,\vee_{\mathrm{I}1}\cup \qquad \overbrace{A \cup B \subseteq A \cap B}^{[1]}}{a \in A \cap B}\,\subseteq\forall_{\mathrm{E}}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{a \in B}\,\cap\wedge_{\mathrm{E}2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{a \in B}^{[3]}}{a \in A \cup B}\,\vee_{\mathrm{I}2}\cup \qquad \overbrace{A \cup B \subseteq A \cap B}^{[1]}}{a \in A \cap B}\,\subseteq\forall_{\mathrm{E}}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{a \in A}\,\cap\wedge_{\mathrm{E}1}}{A = B}\,\mathrm{ext}[2,3]}{A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]$$

Supposons que $A \cup B \subseteq A \cap B$ .... (1)
Pour démontrer $A = B$ on démontre qu'un élément quelconque de A appartient à B et qu'un élément quelconque de B appartient à A. Soit a un élément quelconque de A, a appartient donc à $A \cup B$; d'après l'hypothèse (1), a appartient donc à $A \cap B$, et donc à B ; symétriquement, en supposant $a \in B$, on en déduit successivement $a \in A \cup B$, $a \in A \cap B$ et $a \in A$.

Exercice 2

Démontrez en déduction naturelle, en écrivant l'arbre de preuve et le style textuel, la proposition logique suivante :
$A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B$

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{a \in A \cup B}^{[2]} \qquad \dfrac{\overbrace{a \in A}^{[3]} \qquad \dfrac{\overbrace{a \in A}^{[3]} \qquad \dfrac{\overbrace{A = B}^{[1]}}{a \in A \Rightarrow a \in B}\,\mathrm{ext}\wedge_{\mathrm{E}1}}{a \in B}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{a \in A \cap B}\,\wedge_{\mathrm{I}}\cap \qquad \dfrac{\dfrac{\overbrace{a \in B}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{A = B}^{[1]}}{a \in B \Rightarrow a \in A}\,\mathrm{ext}\wedge_{\mathrm{E}2}}{a \in A}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}} \qquad \overbrace{a \in B}^{[4]}}{a \in A \cap B}\,\wedge_{\mathrm{I}}\cap}{a \in A \cap B}\,\cup\vee_{\mathrm{E}}[3,4]}{A \cup B \subseteq A \cap B}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}\forall_{\mathrm{I}}\subseteq[2]}{A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]$$

Exercice 3

Déduire des deux exercices précédents que $A \cup B \subseteq A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B}\,\mathit{Exo1} \qquad \dfrac{}{A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B}\,\mathit{Exo2}}{(A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B) \wedge (A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B)}\,\wedge_{\mathrm{I}}}{A \cup B \subseteq A \cap B \Leftrightarrow A = B}\,\Leftrightarrow \text{déf}$$

Exercice 4

Démontrer en déduction naturelle, en écrivant l'arbre de preuve et à l'aide de la règle du tiers-exclu, que $(A \iff B) \iff ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$ (l'arbre est assez conséquent, donc vous pouvez démontrer une implication puis l'autre). Dans votre ou vos arbres de preuves, vous encadrerez la portée de chaque hypothèse (la partie de l'arbre où elle est disponible).

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\tfrac{1}{3}ex \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[2]} \quad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A \Leftrightarrow B}^{[1]}}{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}\Leftrightarrow \text{déf}}{A \Rightarrow B}\wedge_{E1}}{B}\Rightarrow_E}{A \wedge B}\wedge_I}{(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))}\vee_{I1} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{\neg A}^{[3]} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{B}^{[4]} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A \Leftrightarrow B}^{[1]}}{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}\Leftrightarrow \text{déf}}{B \Rightarrow A}\wedge_{E2}}{A}\Rightarrow_E \quad \dfrac{\overbrace{\neg A}^{[3]}}{A \Rightarrow \bot}\neg\,\text{déf}}{\bot}\Rightarrow_E}{B \Rightarrow \bot}\Rightarrow_{I[4]}}{\neg B}\neg\,\text{déf}}{(\neg A) \wedge \neg B}\wedge_I}{(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))}\vee_{I2}}{(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))}\vee_{E[2,3]}}{(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))}\Rightarrow_{I[1]}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))}^{[1]} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]}}{B}\wedge_{E2}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_I \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{A \wedge B}^{[2]}}{A}\wedge_{E1}}{B \Rightarrow A}\Rightarrow_I}{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}\wedge_I}{A \Leftrightarrow B}\Leftrightarrow \text{déf} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{A}^{[4]} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{(\neg A) \wedge \neg B}^{[3]}}{\neg A}\wedge_{E1}}{A \Rightarrow \bot}\neg\,\text{déf}}{\bot}\Rightarrow_E}{B}\bot_E}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{I[4]} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{B}^{[5]} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{(\neg A) \wedge \neg B}^{[3]}}{\neg B}\wedge_{E2}}{B \Rightarrow \bot}\neg\,\text{déf}}{\bot}\Rightarrow_E}{A}\bot_E}{B \Rightarrow A}\Rightarrow_{I[5]}}{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}\wedge_I}{A \Leftrightarrow B}\Leftrightarrow \text{déf}}{A \Leftrightarrow B}\vee_{E[2,3]}}{((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)}\Rightarrow_{I[1]}$$

Exercice 5

Démontrez en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve la proposition logique suivante :
$[P(a) \wedge (\forall x\ \ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow F(x,b))] \Rightarrow \exists x\, \exists y\, F(x,y)$

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P(a) \wedge (\forall x\ \ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow F(x,b))}^{[1]}}{P(a)}\wedge_{E1}}{P(a) \vee Q(a)}\vee_{I1} \quad \dfrac{\dfrac{\overbrace{P(a) \wedge (\forall x\ \ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow F(x,b))}^{[1]}}{\forall x\ \ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow F(x,b)}\wedge_{E2}}{(P(a) \vee Q(a)) \Rightarrow F(a,b)}\forall_{E(\frac{x}{a})}}{F(a,b)}\Rightarrow_E}{\exists y\, F(a,y)}\exists_I}{\exists x\, \exists y\, F(x,y)}\exists_I}{[P(a) \wedge (\forall x\ \ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow F(x,b))] \Rightarrow \exists x\, \exists y\, F(x,y)}\Rightarrow_{I[1]}$$

Exercice 6

Démontrez en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve la proposition logique suivante :
$(\forall x\ \ \exists y\ \ \neg P(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists\, x\ \ \forall y\ \ P(x,y))$

Corrigé

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \overbrace{\exists x\, \forall y\, P(x,y)}^{[2]}
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{\overbrace{\forall x\, \exists y\, \neg P(x,y)}^{[1]}}{\exists y\, \neg P(a,y)}\,\forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{a})
        \qquad
        \dfrac{
          \dfrac{\overbrace{\forall y\, P(a,y)}^{[3]}}{P(a,b)}\,\forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{y}{b})
          \qquad
          \dfrac{\overbrace{\neg P(a,b)}^{[4]}}{P(a,b) \Rightarrow \bot}\,\neg\,\text{déf}
        }{\bot}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}
      }{\bot}\,\exists_{\mathrm{E}}[4]
    }{\bot}\,\exists_{\mathrm{E}}[3]
  }{
    \dfrac{(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) \Rightarrow \bot}{\neg(\exists x\, \forall y\, P(x,y))}\,\neg\,\text{déf}
  }\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]
}{(\forall x\, \exists y\, \neg P(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists x\, \forall y\, P(x,y))}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]
$$

Exercice 7

On souhaite démontrer que $\emptyset$ **est l'unique élément absorbant de** $\cap$:

$$\forall X,\ (\forall A,\ X \cap A = X \ \wedge\ A \cap X = X) \ \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

On a besoin de démontrer des règles de déduction qui nous faciliteront la preuve.

a) Première méthode : en utilisant les raccourcis suivants que vous démontrerez ensuite.

– **Symétrie de l'égalité sur les ensembles**

$$\dfrac{A = B}{B = A}\,=_{sym}$$

– **Transitivité de l'égalité sur les ensembles**

$$\dfrac{A = B \quad B = C}{A = C}\,=_{trans}$$

– L'énoncé suivant que vous démontrerez en utilisant la règle de l'absurde ($\bot_e$)

$$\forall F,\ F \cap \emptyset = \emptyset$$

b) Deuxième méthode : en utilisant la définition suivante de l'égalité de deux ensembles

$$A = B \ \overset{\text{déf}}{=\!=}\ A \subseteq B \ \wedge\ B \subseteq A$$

et l'énoncé $\forall F,\ \emptyset \subseteq F$ que vous démontrerez ensuite en utilisant la règle de l'absurde ($\bot_e$).

Exercice 8

À chercher seul

Sous le modèle de l'exercice précédent démontrez que $\emptyset$ **est l'unique élément neutre de** $\cup$:

$$\forall X,\ (\forall A,\ X \cup A = X \ \wedge\ A \cup X = A) \ \Rightarrow\ X = \emptyset.$$

Exercice 9

Démontrez les propriétés suivantes de la différence ensembliste :

1. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \emptyset = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \emptyset$. En particulier, $A \setminus A = \emptyset$.
3. Monotonie dans le premier argument : Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. **Anti-monotonie dans le deuxième argument : Si** $A \subseteq B$ **alors** $C \setminus B \subseteq C \setminus A$**.**

Exercice 10

Démontrer les assertions suivantes :

1. $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$**.**
2. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ **ssi** $A = B$**.**
3. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$**.**

Corrigé

Pour simplifier la présentation, nous utiliserons une démonstration en langue naturelle (vous pourrez retrouver l'arbre exact en exercice).

Montrons $\{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$:

Soit e un ensemble vérifiant :

$e \in \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$ .... (1)

Par définition, nous obtenons :

$\exists X \exists Y e = X \cup Y \wedge X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)$ .... (2)

d'où

$e = X_0 \cup Y_0 \wedge X_0 \in \mathcal{P}(A) \wedge Y_0 \in \mathcal{P}(B)$ .... (3)

De (3), nous obtenons :

$e = X_0 \cup Y_0$ .... (4)

$X_0 \in \mathcal{P}(A)$ .... (5)

$Y_0 \in \mathcal{P}(B)$ .... (6)

d'où :

$X_0 \subseteq A$ .... (5')

$Y_0 \subseteq B$ .... (6')

La monotonie de l'union, à partir de (5') et (6'), nous donne :

$X_0 \cup Y_0 \subseteq A \cup B$ .... (7)

De (4) et (7) nous obtenons :

$e \subseteq A \cup B$ .... (8)

c'est à dire

$e \in \mathcal{P}(A \cup B)$ .... CQFD

Montrons $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$:

Soit e un ensemble vérifiant :

$e \in \mathcal{P}(A \cup B)$ .... (1)

Soit, par définition de $\mathcal{P}$:

$e \subseteq (A \cup B)$ .... (1')

Posons :

$X_0 =_{def} e \cap A$ .... (2)

$Y_0 =_{def} e \cap B$ .... (3)

Nous faisons le raisonnement équationnel suivant :

$$\mathcal{D}_i \left\{ \begin{array}{ll} & X_0 \cup Y_0 \\ = & \quad \{\text{par définition de } X_0 \text{ et } Y_0\} \\ & (e \cap A) \cup (e \cap B) \\ = & \quad \{\text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup \text{ (cf. Cours) }\} \\ & e \cap (A \cup B) \\ = & \quad \{\text{grâce au théorème } X \subseteq Y \equiv X = X \cap Y\text{, que je vous laisse démontrer, appliqué à } e \text{ et }\} \\ & \quad \{(A \cup B)\text{, et à l'hypothèse (1')}\} \\ & e \end{array} \right.$$

Ce qui nous donne :

$e = X_0 \cup Y_0$ .... (4)

De plus, en utilisant le théorème $X \cap Y \subseteq Y$, que vous pouvez démontrer, nous obtenons

$X_0 \subseteq A$ .... (5)

$Y_0 \subseteq B$ .... (6)

c'est à dire :

$X_0 \in \mathcal{P}(A)$ .... (5')

$Y_0 \in \mathcal{P}(B)$ .... (6')

De (4), (5') et (6'), nous obtenons :

$\exists X \exists Y e = X \cup Y \wedge X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)$ .... (7)

C'est à dire :

$e \in \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$ .... CQFD

4. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$**.**
5. **En général,** $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ **est faux.**

Exercice 11

Démontrer les propriétés suivantes du produit cartésien :

1. Monotonie du produit cartésien : Si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ alors $A \times B \subseteq C \times D$.
2. $\cup$-Distributivité : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $\cap$-Distributivité : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
4. $\setminus$-Distributivité : $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
5. En général, $A \times B = B \times A$ est faux.

Exercice 12

Soit A un ensemble à n éléments avec $n \in \mathbb{N}$. Combien d'éléments contient $\mathcal{P}(A)$? Démontrer votre réponse.