

Exercice 1

Le patron d'un restaurant doit bientôt recevoir un chef d'état étranger. Il ne connaît malheureusement pas les goûts de son convive, et a peur de détériorer les relations entre le pays de ce chef d'état et la France en lui servant un menu qui ne lui convienne pas. Le chef du protocole de l'Elysée envoie à notre restaurateur les indications suivantes, sous forme de devinette :

- (H₁) S'il n'aime pas la volaille, alors il aime le lapin ou le poisson
- (H₂) Il a les mêmes goûts pour le lapin et le boeuf
- (H₃) S'il n'aime pas le lapin, alors il aime le poisson
- (H₄) Il n'aime pas la volaille ou il n'aime pas le poisson
- (H₅) S'il aime le poisson et pas la volaille, alors il aime le boeuf

Après avoir réfléchi, le restaurateur décide de préparer du rouget car selon lui,

- (C) Le chef d'état n'aime ni le boeuf, ni le lapin

Montrer que cette conclusion est erronée en utilisant la déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve. Vous noterez

V : Le chef d'état aime la volaille

L : Le chef d'état aime le lapin

P : Le chef d'état aime le poisson

B : Le chef d'état aime le boeuf

et vous écrirez chacune des hypothèses (H₁), (H₂), ... (H₅) et la conclusion sous forme de propositions logiques.

Corrigé

(H₁) $(\neg V) \Rightarrow (L \vee P)$

(H₂) $L \Leftrightarrow B$

(H₃) $(\neg L) \Rightarrow P$

(H₄) $(\neg V) \vee \neg P$

(H₅) $(P \wedge \neg V) \Rightarrow B$

(C) $(\neg B) \wedge \neg L$

Soit \mathcal{D}_1 l'arbre de preuve suivant :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overbrace{(\neg B) \wedge \neg L}^{[1]} \wedge_{E1} \dots \neg B \dots \neg \text{déf}}{B \Rightarrow \perp}}{\perp} \quad \frac{\overbrace{(P \wedge \neg V) \Rightarrow B}^{(H_5)} \quad \frac{\overbrace{(\neg L) \Rightarrow P}^{(H_3)} \quad \frac{\overbrace{(\neg B) \wedge \neg L}^{[1]} \wedge_{E2}}{\neg L} \wedge_{E2}}{P} \Rightarrow_E}{P \wedge \neg V} \wedge_I}{B \Rightarrow_E} \Rightarrow_E
 \end{array}$$

Soit \mathcal{D}_2 l'arbre de preuve suivant :

$$\frac{\overbrace{P \Rightarrow \perp}^{[3]} \dots \neg P \dots \neg \text{déf}}{\perp} \quad \frac{\overbrace{(\neg L) \Rightarrow P}^{(H_3)} \quad \frac{\overbrace{(\neg B) \wedge \neg L}^{[1]} \wedge_{E2}}{\neg L} \wedge_{E2}}{P} \Rightarrow_E}{P \Rightarrow_E} \Rightarrow_E$$

L'arbre de preuve complet est alors :

$$\frac{\overbrace{((\neg V) \vee \neg P)}^{(H_4)} \quad \frac{\overbrace{(\neg B) \wedge \neg L}^{[1]} \quad \overbrace{\dots}^{H_5} \quad \overbrace{\dots}^{H_3} \quad \overbrace{\neg V}^{[2]}}{\perp} \mathcal{D}_1 \quad \frac{\overbrace{\neg P}^{[3]} \quad \overbrace{\dots}^{H_3} \quad \overbrace{(\neg B) \wedge \neg L}^{[1]}}{\perp} \mathcal{D}_2}{\perp} \vee_E[2,3]}{\perp} \Rightarrow_I[1]}{\overbrace{((\neg B) \wedge \neg L) \Rightarrow \perp}^{\dots \neg \text{déf}}} \neg \text{déf}} \neg \text{déf}$$

Exercice 2

Une association est régie par le règlement intérieur suivant :

Art1. Les membres de la direction financière doivent être choisis parmi ceux de la direction générale.

Art2. Nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque s'il n'est membre de la direction financière.

Art3. Aucun membre de la direction de la bibliothèque ne peut être membre de la direction financière.

Soit Jean est membre de direction, on désigne par f, g, b les propositions atomiques « Jean est membre de la direction financière » (resp. générale) (resp. de la bibliothèque).

1. Formalisez les trois articles à l'aide des propositions f, g, b du règlement.
2. Montrer que l'ensemble précédent est équivalent à $f \Rightarrow g \wedge g \Rightarrow \neg b$.
3. Donnez une formulation équivalente et plus simple du règlement.

Corrigé

Exercice 3

On donne l'argument suivant :

Tout médecin soigne ceux qui ne se soignent pas. Il n'existe aucun médecin qui soigne au moins une personne qui se soigne. Donc il n'y a pas de médecin.

En introduisant $M(x)$ pour « x est médecin » et $S(x, y)$ pour « x soigne y », formaliser l'argumentation ensuite montrer que cette formulation est valide en donnant la preuve de l'énoncé sous forme d'arbre en déduction naturelle.

Corrigé

Exercice 4

Un crime a été commis ; André Bernard et Claude sont trois suspects. On envisage les trois propositions atomiques A : « André est coupable », B : « Bernard est coupable » et C : « Claude est coupable ». Les trois suspects ont fait les témoignages suivants :

- André : « Bernard est coupable et Claude est innocent ».
- Bernard : « Si André est coupable alors Claude l'est aussi ».
- Claude : « Je suis innocent mais l'un des deux autres au moins est coupable ».

Le juge d'instruction fait l'hypothèse générale que, dans toute affaire, les innocents sont sincères et les coupables mentent systématiquement.

- a Formalisez les témoignages
- b Formalisez l'hypothèse du juge. D'après le juge : si X dit P alors P est vrai si et seulement si X est innocent ce qu'on écrit : $P \Rightarrow \neg X$
- c Démontrer que : B est innocent en donnant une preuve en déduction naturelle.

Corrigé