

Pour les exercices suivants, démontrer la proposition logique en énoncé en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle. Prendre particulièrement soin de la gestion des hypothèses : pour chaque sous-arbre, l'étudiant devra être capable de distinguer les hypothèses disponibles des hypothèses levées.

**Exercice 1**

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$$

Rappelons qu'il faut la lire ainsi :  $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

**Exercice 2**

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

**Exercice 3**

$$A \wedge B \Rightarrow A; \quad B \wedge A \Rightarrow A; \quad A \wedge A \Rightarrow A$$

**Exercice 4**

$$((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C)); \quad (A \wedge (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

**Exercice 5**

$$((A \wedge B) \Rightarrow A \Rightarrow D) \Rightarrow (C \wedge A \wedge C \Rightarrow B \Rightarrow D)$$

Remarque : par convention,  $P \wedge Q \wedge R$  se lit  $(P \wedge Q) \wedge R$ .

Question subsidiaire : trouver un arbre de preuve sans répétition.

**Exercice 6**

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

**Exercice 7**

$$(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$$

**Exercice 8**

$$(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$$

**Exercice 9**

$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

**Exercice 10**

$$B \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \vee C$$

**Exercice 11**

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$$

**Exercice 12**

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

**Exercice 13**

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$$

**Exercice 14**

$$(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

**Exercice 15**

$$(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

**Exercice 16**

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$$

**Exercice 17**

$$B \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \vee C$$

**Exercice 18**

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$$

---

Pour chacun des exercices suivants, il s'agit de trouver un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé.

**Exercice 19**

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$$

**Exercice 20**

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$$

---

Pour les exercices suivants, trouver un arbre de preuve ou un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé.

**Exercice 21**

$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

**Exercice 22**

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee B)$$

**Exercice 23**

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$$