INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 8

Inclusion

Version longue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ x_0 \in B\end{array}}{x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B}\Rightarrow\mathrm{I}[n]}{\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B}\forall_\mathrm{I}}{A \subseteq B}\subseteq\text{déf}$$

Version abrégée

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ x_0 \in B\end{array}}{A \subseteq B}\subseteq\text{déf}[n]$$

Égalité extensionnelle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ x_0 \in B\end{array}}{x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in B}\Rightarrow\mathrm{I}[n] \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in B}^{[m]}\\ \vdots\\ x_0 \in A\end{array}}{x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in A}\Rightarrow\mathrm{I}[m]}{x_0 \in A \Leftrightarrow x_0 \in B}\wedge\mathrm{I}}{\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B}\forall_\mathrm{I}}{A = B}\text{ext}$$

Abrégé

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ x_0 \in B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\overbrace{x_0 \in B}^{[m]}\\ \vdots\\ x_0 \in A\end{array}}{A = B}\text{ext}[n,m]$$

Intersection

Version longue

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \quad x \in B}{x \in A \wedge x \in B}\wedge\mathrm{I}}{x \in A \cap B}\cap\text{déf}$$

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cap B}{x \in A \wedge x \in B}\cap\text{déf}}{x \in A}\wedge\mathrm{E}_1$$

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cap B}{x \in A \wedge x \in B}\cap\text{déf}}{x \in B}\wedge\mathrm{E}_2$$

Version abrégée

$$\dfrac{x \in A \quad x \in B}{x \in A \cap B}\wedge\mathrm{I}\cap$$

$$\dfrac{x \in A \cap B}{x \in A}\cap\wedge\mathrm{E}_1$$

$$\dfrac{x \in A \cap B}{x \in B}\cap\wedge\mathrm{E}_2$$

Union (introduction)

Version longue

$$\dfrac{\dfrac{x \in A}{x \in A \vee x \in B}\vee\mathrm{I}_1}{x \in A \cup B}\cup\text{déf}$$

$$\dfrac{\dfrac{x \in B}{x \in A \vee x \in B}\vee\mathrm{I}_2}{x \in A \cup B}\cup\text{déf}$$

Version abrégée

$$\dfrac{x \in A}{x \in A \cup B}\vee\mathrm{I}_1\cup$$

$$\dfrac{x \in B}{x \in A \cup B}\vee\mathrm{I}_2\cup$$

Union (élimination)

$$\dfrac{\dfrac{x \in A \cup B}{x \in A \vee x \in B}\cup\text{déf} \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ \mathsf{P}\end{array}\qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in B}^{[m]}\\ \vdots\\ \mathsf{P}\end{array}}{\mathsf{P}}\vee\mathrm{E}[n,m]$$

Version abrégée

$$\dfrac{x \in A \cup B \qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in A}^{[n]}\\ \vdots\\ \mathsf{P}\end{array}\qquad \begin{array}{c}\overbrace{x \in B}^{[m]}\\ \vdots\\ \mathsf{P}\end{array}}{\mathsf{P}}\cup\vee\mathrm{E}[n,m]$$

Union et intersection

1. Monotonie de $\cup$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. Monotonie de $\cap$: si $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$ alors $A \cap C \subseteq B \cap D$.
3. Associativité de $\cup$: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. Associativité de $\cap$: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. Commutativité de $\cup$: $A \cup B = B \cup A$.
6. Commutativité de $\cap$: $A \cap B = B \cap A$.
7. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration de la monotonie de $\cup$

Soient A, B, C et D des ensembles tels que :

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D.$$

On montre $A \cup C \subseteq B \cup D$. C'est-à-dire :

$$\forall x\ x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup D.$$

Soit x tel que $x \in A \cup C$. On distingue deux cas :

1. $x \in A$. De l'hypothèse $A \subseteq B$, nous déduisons $x \in B$. Donc $x \in B \cup D$.
2. $x \in C$. De l'hypothèse $C \subseteq D$, nous déduisons $x \in D$. Donc $x \in B \cup D$. q.e.d.

Différence et complémentaire

1. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $A \setminus B = A$. En particulier, $A \setminus \emptyset = A$.
2. Si $A \subseteq B$ alors $A \setminus B = \emptyset$. En particulier, $A \setminus A = \emptyset$.
3. Monotonie de $\setminus$ dans le premier argument :
   si $A \subseteq B$ alors $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
4. Anti-monotonie de $\setminus$ dans le deuxième argument :
   si $A \subseteq B$ alors $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.
5. Lois de Morgan
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Anti-monotonie du complémentaire : si $A \subseteq B$ alors $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Eléments neutres et absorbants

1. $\emptyset$ est un élément neutre de $\cup$: $\forall A\ A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
2. $\emptyset$ est l'unique élément neutre de $\cup$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow X = \emptyset.$$

3. $\emptyset$ est un élément absorbant de $\cap$: $\forall A\ A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$.
4. $\emptyset$ est l'unique élément absorbant de $\cap$:

$$\forall X\ (\forall A\ X \cap A = A \cap X = X) \Rightarrow X = \emptyset.$$

Unicité de l'élément neutre de $\cup$

On veut montrer que l'ensemble vide est l'unique élément neutre de $\cup$. C'est-à-dire :

$$\forall X\ (\forall A\ X \cup A = A \cup X = A) \Rightarrow X = \emptyset.$$

Soit X un ensemble tel que $\forall A\ X \cup A = A \cup X = A$. (†)

On doit montrer $X = \emptyset$.

- De (†), nous obtenons $X \cup \emptyset = \emptyset$.
- Mais comme $\emptyset$ est un élément neutre de $\cup$, nous avons aussi $X \cup \emptyset = X$.
- Donc, $X \cup \emptyset = \emptyset = X$. q.e.d.