INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 1

Préliminaires

Plan du chapitre 1

Objectifs

Savoir faire

- Raisonner clairement, se faire comprendre
- Démontrer proprement, (se) convaincre

Outils fondamentaux

- *Logique* : formules, déduction naturelle, récurrence(s)
- *Langage des ensembles* : fonctions, relations, structures, ordres

Motivations

Les objets informatiques sont complexes

- *Structures de données :* organisation d'informations
- *Programmes :* calculs d'informations
- *Il faut constamment raisonner*, expérimenter ne suffit pas
- Vous allez devoir prouver la correction de vos programmes

L'informatique est une science

- *Étude* du *sens mathématique* des programmes
- *Quantification* des ressources nécessaires à leur exécution

Repères historiques

Antiquité : Aristote (-384, -322), figures de raisonnement formel

19e siècle : Boole (1815-1864), calcul de valeurs de vérité

20e siècle : création de la logique moderne

- étude des *fondements du raisonnement*
  - formalisation de la logique :
    formules logiques, déductions logiques
  - sémantique (sens) des termes et des formules
  - théorie de la démonstration
- naissance des *modèles de calcul* qui serviront plus tard en informatique

Repères historiques (zoom)

Théorie naïve des ensembles (fin 19e)

Construire toutes les mathématiques à partir

- des entiers (Peano) $\Rightarrow$ insuffisant
- des ensembles (Cantor) $\Rightarrow$ paradoxes, crise des fondements

Naissance de la logique moderne (20e)

Premiers pas 1900 – 1910

Objectif : sauver les meubles

- théorie axiomatique des ensembles (Zermelo, Fraenkel,...)
- théorie des types (Russell)

Repères historiques (zoom suite)

Années 20

- programme de Hilbert : sécuriser les mathématiques (à commencer par le principe de récurrence) sur des bases *finies*
- intuitionnisme (Brouwer) : démonstrations *constructives*

Années 30

Échec du programme de Hilbert (1932) : théorèmes d'incomplétude de *Gödel*

Modèles de calcul : lambda-calcul (Church), fonctions récursives (Herbrand, Gödel), machines de Turing
+ théorie de la démonstration (Herbrand, Gödel, Gentzen)
+ théorie des modèles (Tarski)

Repères historiques : à retenir

Quelques résultats surprenants
Certaines tâches sont irréalisables par des programmes

Outils fondamentaux de l'informatique
Nés au moins 10 ans avant le premier ordinateur

Développements poussés de la logique formelle
Bien plus importants pour l'informaticien que pour le mathématicien

- en mathématiques, il suffit de savoir qu'*en principe* un raisonnement pourrait être rédigé complètement comme une suite de formules ; en pratique on fait confiance aux confrères ;
- en informatique :
  - clarification de notions essentielles pour exprimer calculs et structures de données
  - raisonnements compliqués, nécessité de *vérifier* (voire produire) *automatiquement* ceux qui sont critiques
    $\Rightarrow$ ils doivent être *formels*

Introduction

Plan du chapitre 2

Plan du chapitre 2 (cont.)

Le gruyère

Un raisonnement (pas si) bien connu

- *Dans le gruyère, il y a des trous.*
- *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous.*
- *Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère.*
- *Donc plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère.*

Ce raisonnement est-il correct, d'un point de vue logique ?

La route (1)

Premier raisonnement

- *Une route verglassée est glissante.*
- *Une route glissante est dangereuse.*
- *Donc une route verglassée est dangereuse.*

La route (2)

Second raisonnement

On ajoute une hypothèse.

- *Une route verglassée est glissante.*
- *Une route glissante est dangereuse.*
- *Une route enneigée est glissante.*
- *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*
  En effet, si elle est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse.

La route (3)

Troisième raisonnement

Mêmes hypothèses et même conclusion que pour le second.

- *Une route verglassée est glissante.*
- *Une route glissante est dangereuse.*
- *Une route enneigée est glissante.*
- *Donc une route verglassée ou enneigée est dangereuse.*
  En effet, si elle est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;
  si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;
  elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse.

La route (4)

Quatrième raisonnement

Mêmes hypothèses mais conclusion différente.

- *Une route verglassée est glissante.*
- *Une route glissante est dangereuse.*
- *Une route enneigée est glissante.*
- *Donc une route verglassée et enneigée est dangereuse.*
  En effet, si elle est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.
  Variante (autre raisonnement)
  si elle est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

Ingrédients

On a des *énoncés*.

Certains énoncés sont admis : *hypothèses*.

Certains énoncés sont déduits des autres :
inférence = règle « de prémisses vers conclusion »

Les déductions s'emboîtent les unes dans les autres :
les conclusions de certaines étapes de déduction
servent de prémisse aux étapes suivantes.
déduction = emboîtement d'inférences

Comment présenter des déductions ?

Présentation usuelle : texte informel

Exemples : voir planches précédentes

Avantage : facile à lire (aucun apprentissage)

Inconvénients :

- pas toujours facile à écrire
- ellipses (parties implicites), risques d'omissions

Présentation formelle, et précise : fractions

Inférence simple

$$\frac{\text{prémisse}_1 \qquad \text{prémisse}_2}{\text{conclusion}}$$

Déduction = emboîtement d'inférences = arbre de preuve

$$\frac{\dfrac{\text{prémisse}_1 \qquad \text{prémisse}_2}{\text{conclusion}_1} \qquad \dfrac{\text{prémisse}_3 \qquad \text{prémisse}_4}{\text{conclusion}_2}}{\text{conclusion}_3}$$

Intermède : arbres

Intuitivement

- une *feuille* est un arbre
  un *nœud* relié à des arbres déjà construits est un nouvel arbre
  il n'y a pas d'autre moyen de former des arbres
- chaque nœud ou feuille est muni d'une *étiquette*
  étiquette = nom, formule logique, ou autre

En informatique : objets couramment manipulés

- Représentables en machine (ex. pointeurs ou tableaux)
- cf. fin INF 121

Mathématiquement

- Définition précise possible à l'aide de fonctions

Exemple d'inférence formelle

$$\frac{\textit{une route verglassée est glissante} \qquad \textit{une route glissante est dangereuse}}{\textit{une route verglassée est dangereuse}}$$

C'est bien une inférence, mais ce n'est pas une inférence logique :
comment justifier le passage des prémisses à la conclusion ?

Il faut analyser la *structure logique* des énoncés tels que
une route verglassée est glissante

Décomposition logique des énoncés

Simplification provisoire : il n'y a qu'une route, *la route*

Énoncés élémentaires (atomiques)

- *la route est verglassée*
- *la route est enneigée*
- *la route est glissante*
- *la route est dangereuse*

Exemple

une route verglassée est glissante
la route est verglassée $\Rightarrow$ *la route est glissante*

$\Rightarrow$ est un *connecteur logique* qui se lit : *implique*

Exercice

$$\dfrac{\textit{une route verglassée est glissante} \qquad \textit{une route glissante est dangereuse}}{\textit{une route verglassée est dangereuse}}$$

Reformuler cet arbre en posant :

rv = *la route est verglassée* re = *la route est enneigée*
rg = *la route est glissante* rd = *la route est dangereuse*

Justifier

- TRI : transitivité de l'implication

La route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse

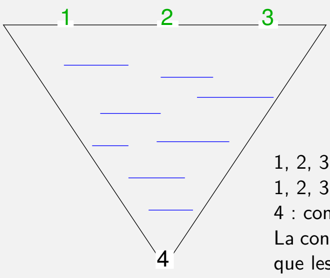
Nouveau *connecteur logique :* $\lor$ qui se lit *ou*

$$\dfrac{\dfrac{rv \Rightarrow rg \qquad re \Rightarrow rg}{(rv \lor re) \Rightarrow rg}\,\mathrm{OGI} \qquad rg \Rightarrow rd}{(rv \lor re) \Rightarrow rd}\,\mathrm{TRI}$$

Justification

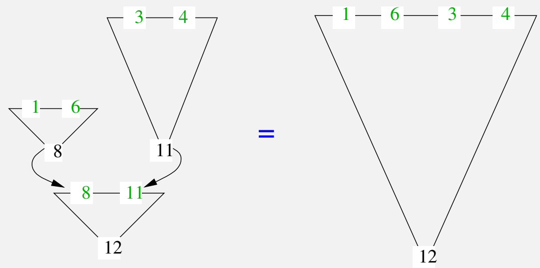
- OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- TRI : transitivité de l'implication

Forme générale d'un arbre de preuve

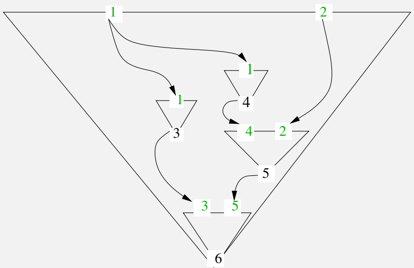


1, 2, 3, 4 : énoncés
1, 2, 3 : hypothèses
4 : conclusion
La conclusion est bonne pourvu que les hypothèses le soient

Assemblage d'arbres de preuve



Imbrication d'arbres de preuve



La route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse.

Justification

- OGI : Ou à Gauche d'une Implication
- TRI : transitivité de l'implication

La route (4)

Si la route est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.
Nouveau *connecteur logique :* $\land$ qui se lit *et*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(rv \land re) \Rightarrow rv}\,\mathrm{EGI}_1 \qquad rv \Rightarrow rg}{(rv \land re) \Rightarrow rg}\,\mathrm{TRI} \qquad rg \Rightarrow rd}{(rv \land re) \Rightarrow rd}\,\mathrm{TRI}$$

Justification

- EGI : Et à Gauche d'une Implication
- TRI : transitivité de l'implication

La route (4), variantes

Si la route est verglassée et enneigée, elle est enneigée, donc glissante, donc dangereuse.

Gruyère : le retour

Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous
Plus il y a de trous, moins il y a de gruyère
Plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère

Énoncés atomiques

Il y a plus de gruyère = pg
Il y a plus de trous = pt
Il y a moins de gruyère = mg

Preuve (à compléter)

Gruyère : où est le problème ?

- on a un raisonnement *sous hypothèses* :
  si les hypothèses et les inférences sont correctes, la conclusion sera correcte
- l'inférence logique est correcte
- chaque hypothèse, prise séparément, est correcte
  (on peut raisonner avec)
- la conclusion est manifestement incorrecte
- les prémisses sont contradictoires
  - la première : exacte à *densité constante*
  - la seconde : exacte à *volume constant*