INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 7

Les ensembles

Plan du chapitre

Introduction

Comparaison et opérations

Définitions ensemblistes

Introduction
Motivations
Description d'ensembles
Piège

Rôle de la théorie des ensembles

Pour les mathématiques : outil universel, fondement des différentes branches

- Georg Cantor (1845-1918) à l'origine des travaux sur la théorie des ensembles
- Zermelo (1871-1953), Fraenkel (1891-1965) et von Neumann (1903-1957) développent une théorie *axiomatique* des ensembles. Principalement en réaction au paradoxe de Russell :

$$\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$$

Pour l'informatique : fournit un vocabulaire précis et des notions utilisées constamment pour décrire des données, des opérations, etc.

Rôle de la théorie des ensembles

Pour les mathématiques : outil universel, fondement des différentes branches

- Georg Cantor (1845-1918) à l'origine des travaux sur la théorie des ensembles
- Zermelo (1871-1953), Fraenkel (1891-1965) et von Neumann (1903-1957) développent une théorie *axiomatique* des ensembles. Principalement en réaction au paradoxe de Russell :

$$\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$$

Pour l'informatique : fournit un vocabulaire précis et des notions utilisées constamment pour décrire des données, des opérations, etc.

Rôle de la théorie des ensembles

Pour les mathématiques : outil universel, fondement des différentes branches

- Georg Cantor (1845-1918) à l'origine des travaux sur la théorie des ensembles
- Zermelo (1871-1953), Fraenkel (1891-1965) et von Neumann (1903-1957) développent une théorie *axiomatique* des ensembles. Principalement en réaction au paradoxe de Russell :

$$\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$$

Pour l'informatique : fournit un vocabulaire précis et des notions utilisées constamment pour décrire des données, des opérations, etc.

Introduction
Motivations
Description d'ensembles
Piège

Théorie naïve des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets

- distinguables les unes des autres
- telle qu'il existe un critère pour savoir si un objet appartient à cette collection ou pas.

Notation

$x \in E$ se lit : x appartient à l'ensemble E, ou x est un élément de E.

Théorie naïve des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets

- distinguables les unes des autres
- telle qu'il existe un critère pour savoir si un objet appartient à cette collection ou pas

Notation

$x \in E$ se lit : x appartient à l'ensemble E, ou x est un élément de E.

Théorie naïve des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets

- distinguables les unes des autres
- telle qu'il existe un critère pour savoir si un objet appartient à cette collection ou pas

Notation

$x \in E$ se lit : x appartient à l'ensemble E, ou x est un élément de E.

Théorie naïve des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets

- distinguables les unes des autres
- telle qu'il existe un critère pour savoir si un objet appartient à cette collection ou pas

Notation

$x \in E$ se lit : x appartient à l'ensemble E, ou x est un élément de E.

Théorie naïve des ensembles

Un ensemble est une collection d'objets

- distinguables les unes des autres
- telle qu'il existe un critère pour savoir si un objet appartient à cette collection ou pas

Notation

$x \in E$ se lit : x appartient à l'ensemble E, ou x est un élément de E.

Description extensionnelle

Un ensemble peut être défini de manière extensionnelle, par une enumération de ses éléments entre accolades.

Exemples

- $\{0\}$
- $\{3, 1, 17\}$

Description extensionnelle

Un ensemble peut être défini de manière extensionnelle, par une enumération de ses éléments entre accolades.

Exemples

- $\{0\}$
- $\{3, 1, 17\}$

Description extensionnelle

Un ensemble peut être défini de manière extensionnelle, par une enumération de ses éléments entre accolades.

Exemples

- $\{0\}$
- $\{3, 1, 17\}$

Remarques

- Il existe un unique ensemble à 0 élément, nommé l'ensemble vide et noté $\emptyset$
- L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'est pas significatif, pas plus que la répétition d'un élément
  Exemple : $\{1, 2, 4\} = \{2, 4, 1\} = \{1, 2, 1, 4, 4, 4\}$
- Les ensembles peuvent avoir des contenus hétérogènes
  Exemple : $\{1, 3, \text{'A'}, \mathbb{N}, 1, 542\}$.
- Les ensembles peuvent être des éléments d'autres ensembles
  Exemple : $\{1, \{1, 2, 4\}, \emptyset, \{\{1\}, 7\}, 3, \text{'A'}, \mathbb{N}, 1, 542\}$.

Remarques

- Il existe un unique ensemble à 0 élément, nommé l'ensemble vide et noté $\emptyset$
- L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'est pas significatif, pas plus que la répétition d'un élément
Exemple : $\{1, 2, 4\} = \{2, 4, 1\} = \{1, 2, 1, 4, 4, 4\}$
- Les ensembles peuvent avoir des contenus hétérogènes
Exemple : $\{1, 3, 'A', \mathbb{N}, 1, 542\}$.
- Les ensembles peuvent être des éléments d'autres ensembles
Exemple : $\{1, \{1, 2, 4\}, \emptyset, \{\{1\}, 7\}, 3, 'A', \mathbb{N}, 1, 542\}$.

Remarques

- Il existe un unique ensemble à 0 élément, nommé l'ensemble vide et noté $\emptyset$
- L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'est pas significatif, pas plus que la répétition d'un élément
  Exemple : $\{1, 2, 4\} = \{2, 4, 1\} = \{1, 2, 1, 4, 4, 4\}$
- Les ensembles peuvent avoir des contenus hétérogènes
  Exemple : $\{1, 3, \text{'A'}, \mathbb{N}, 1, 542\}$.
- Les ensembles peuvent être des éléments d'autres ensembles
  Exemple : $\{1, \{1, 2, 4\}, \emptyset, \{\{1\}, 7\}, 3, \text{'A'}, \mathbb{N}, 1, 542\}$.

Remarques

- Il existe un unique ensemble à 0 élément, nommé l'ensemble vide et noté $\emptyset$
- L'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble n'est pas significatif, pas plus que la répétition d'un élément
  Exemple : $\{1, 2, 4\} = \{2, 4, 1\} = \{1, 2, 1, 4, 4, 4\}$
- Les ensembles peuvent avoir des contenus hétérogènes
  Exemple : $\{1, 3, \text{'A'}, \mathbb{N}, 1, 542\}$.
- Les ensembles peuvent être des éléments d'autres ensembles
  Exemple : $\{1, \{1, 2, 4\}, \emptyset, \{\{1\}, 7\}, 3, \text{'A'}, \mathbb{N}, 1, 542\}$.

Et si l'ensemble est infini ?

On peut *évoquer* le résultat attendu, par exemple :

- $\{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$

Mais ce n'est pas rigoureux !

Et si l'ensemble est infini ?

On peut *évoquer* le résultat attendu, par exemple :

- $\{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$

Mais ce n'est pas rigoureux !

Et si l'ensemble est infini ?

On peut *évoquer* le résultat attendu, par exemple :

- $\{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$

Mais ce n'est pas rigoureux !

Description intensionnelle

Un ensemble peut aussi être défini de manière intensionnelle, par une propriété vérifiée par tous les éléments de l'ensemble (et seulement par ceux là) : $\{x \mid P(x)\}$, où P est un prédicat

Exemple

$\{n \mid n \in \mathbb{N} \land \text{est\_pair}(n)\}$

Notation

On écrit aussi $\{x \in A \mid R(x)\}$ au lieu de $\{x \mid x \in A \land R(x)\}$

Exemple

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$ est equivalent à $\{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \geq 3\}$.

Description intensionnelle

Un ensemble peut aussi être défini de manière intensionnelle, par une propriété vérifiée par tous les éléments de l'ensemble (et seulement par ceux là) : $\{x \mid P(x)\}$, où P est un prédicat

Exemple

$\{n \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \text{est\_pair}(n)\}$

Notation

On écrit aussi $\{x \in A \mid R(x)\}$ au lieu de $\{x \mid x \in A \ \wedge \ R(x)\}$

Exemple

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$ est equivalent à $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3\}$.

Description intensionnelle

Un ensemble peut aussi être défini de manière intensionnelle, par une propriété vérifiée par tous les éléments de l'ensemble (et seulement par ceux là) : $\{x \mid P(x)\}$, où P est un prédicat

Exemple

$\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \text{est\_pair}(n)\}$

Notation

On écrit aussi $\{x \in A \mid R(x)\}$ au lieu de $\{x \mid x \in A \wedge R(x)\}$

Exemple

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$ est equivalent à $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3\}$.

Description intensionnelle

Un ensemble peut aussi être défini de manière intensionnelle, par une propriété vérifiée par tous les éléments de l'ensemble (et seulement par ceux là) : $\{x \mid P(x)\}$, où P est un prédicat

Exemple

$\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \text{est\_pair}(n)\}$

Notation

On écrit aussi $\{x \in A \mid R(x)\}$ au lieu de $\{x \mid x \in A \wedge R(x)\}$

Exemple

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$ est equivalent à $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3\}$.

Introduction
Motivations
Description d'ensembles
Piège

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X \,, X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\ , X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\bot$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\,,X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\ , X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X, X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$

L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X, X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\ , X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\ , X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\ , X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Paradoxe de Russell

Remarque préliminaire

Étant donné une proposition quelconque A, on a $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$

- on démontre $\big(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$ et on prend $\perp$ pour B
- ou on procède par cas sur le tiers exclu appliqué à A

Conséquence

Une propriété ne suffit pas à définir un ensemble !

Considérons $\mathrm{Ru} = \{X \mid X \notin X\}$
L'ensemble Ru existe-t-il vraiment ?

- par définition de Ru on a : $\forall X\ , X \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(X \in X)$;
- donc, en particulier : $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru} \Leftrightarrow \neg(\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru})$;
- on applique la remarque ci-dessus en prenant pour A :
  $\mathrm{Ru} \in \mathrm{Ru}$

Parade

Une définition intensionnelle n'est possible qu'à l'intérieur d'un ensemble déjà construit.

Axiome de séparation

Si E est un ensemble déjà construit et P est un prédicat, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ est un nouvel ensemble.

Conséquence

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- Si un tel ensemble T pouvait être formé, on retrouverait le paradoxe de Russell en considérant $\{x \in T \mid x \notin x\}$.

Parade

Une définition intensionnelle n'est possible qu'à l'intérieur d'un ensemble déjà construit.

Axiome de séparation

Si E est un ensemble déjà construit et P est un prédicat, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ est un nouvel ensemble.

Conséquence

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- Si un tel ensemble T pouvait être formé, on retrouverait le paradoxe de Russell en considérant $\{x \in T \mid x \notin x\}$.

Parade

Une définition intensionnelle n'est possible qu'à l'intérieur d'un ensemble déjà construit.

Axiome de séparation

Si E est un ensemble déjà construit et P est un prédicat, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ est un nouvel ensemble.

Conséquence

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- Si un tel ensemble T pouvait être formé, on retrouverait le paradoxe de Russell en considérant $\{x \in T \mid x \notin x\}$.

Parade

Une définition intensionnelle n'est possible qu'à l'intérieur d'un ensemble déjà construit.

Axiome de séparation

Si E est un ensemble déjà construit et P est un prédicat, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ *est un nouvel ensemble.*

Conséquence

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- Si un tel ensemble T pouvait être formé, on retrouverait le paradoxe de Russell en considérant $\{x \in \mathrm{T} \mid x \notin x\}$.

Théorie axiomatique des ensembles

La véritable théorie des ensembles, sur laquelle reposent les mathématiques actuelles, énonce un certain nombre d'axiomes indiquant les constructions autorisées pour former des ensembles de plus en plus complexes.

Exemple : l'axiome de séparation.

Pour comprendre ces axiomes, il est nécessaire de maîtriser les notions de la théorie « naïve » des ensembles.

Pour simplifier, on utilise donc ici la version « naïve » en se munissant de précautions.

Théorie axiomatique des ensembles

La véritable théorie des ensembles, sur laquelle reposent les mathématiques actuelles, énonce un certain nombre d'axiomes indiquant les constructions autorisées pour former des ensembles de plus en plus complexes.

Exemple : l'axiome de séparation.

Pour comprendre ces axiomes, il est nécessaire de maîtriser les notions de la théorie « naïve » des ensembles.

Pour simplifier, on utilise donc ici la version « naïve » en se munissant de précautions.

Théorie axiomatique des ensembles

La véritable théorie des ensembles, sur laquelle reposent les mathématiques actuelles, énonce un certain nombre d'axiomes indiquant les constructions autorisées pour former des ensembles de plus en plus complexes.

Exemple : l'axiome de séparation.

Pour comprendre ces axiomes, il est nécessaire de maîtriser les notions de la théorie « naïve » des ensembles.

Pour simplifier, on utilise donc ici la version « naïve » en se munissant de précautions.

Théorie axiomatique des ensembles

La véritable théorie des ensembles, sur laquelle reposent les mathématiques actuelles, énonce un certain nombre d'axiomes indiquant les constructions autorisées pour former des ensembles de plus en plus complexes.

Exemple : l'axiome de séparation.

Pour comprendre ces axiomes, il est nécessaire de maîtriser les notions de la théorie « naïve » des ensembles.

Pour simplifier, on utilise donc ici la version « naïve » en se munissant de précautions.

Théorie naïve prudente des ensembles

Nous supposons un univers U préalablement construit et cohérent.

La notation $\{x \mid P(x)\}$ représente désormais, implicitement :

$$\{x \in \mathrm{U} \mid P(x)\}$$

Autrement dit : on se limite à considérer des objets (éléments, ensembles) qui sont tous des éléments de U.
En pratique U contient les entiers, les réels, etc.

Remarque

En particulier, si on écrit $\{x \in E \mid P(x)\}$, on a implicitement :

- E appartient à U : $E \in \mathrm{U}$
- tout élément de E appartient à U : $\forall x \; x \in E \Rightarrow x \in \mathrm{U}$

Théorie naïve prudente des ensembles

Nous supposons un univers U préalablement construit et cohérent.

La notation $\{x \mid P(x)\}$ représente désormais, implicitement :

$$\{x \in \mathrm{U} \mid P(x)\}$$

Autrement dit : on se limite à considérer des objets (éléments, ensembles) qui sont tous des éléments de U.
En pratique U contient les entiers, les réels, etc.

Remarque

En particulier, si on écrit $\{x \in E \mid P(x)\}$, on a implicitement :

- E appartient à U : $E \in \mathrm{U}$
- tout élément de E appartient à U : $\forall x\ x \in E \Rightarrow x \in \mathrm{U}$

Plan du chapitre

Introduction

Comparaison et opérations

Définitions ensemblistes

Comparaison et opérations

Comparaison d'ensembles

Opérations sur les ensembles

Égalité

Deux ensembles E et F sont égaux, noté $E{=}F$ si tout élément de E appartient à F et tout élément de F appartient à E :

$$E = F \Leftrightarrow \forall x\ x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

Exemple

$$\{0, 2, 4\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est\_pair}(n)\}$$

Égalité

Deux ensembles E et F sont égaux, noté $E{=}F$ si tout élément de E appartient à F et tout élément de F appartient à E :

$$E = F \Leftrightarrow \forall x \; x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

Exemple

$$\{0, 2, 4\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est\_pair}(n)\}$$

Égalité

Deux ensembles E et F sont égaux, noté $E{=}F$ si tout élément de E appartient à F et tout élément de F appartient à E :

$$E = F \Leftrightarrow \forall x\ x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

Exemple

$$\{0, 2, 4\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \mathrm{est\_pair}(n)\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=} \forall x \; x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \stackrel{\text{déf}}{=} E \subseteq F \wedge \exists x \; x \in F \wedge x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=} \forall x \; x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \stackrel{\text{déf}}{=} E \subseteq F \wedge \exists x \; x \in F \wedge x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall x \; x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} E \subseteq F \wedge \exists x \; x \in F \wedge x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \overset{\text{déf}}{=\!=} \forall x \; x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \overset{\text{déf}}{=\!=} E \subseteq F \wedge \exists x \; x \in F \wedge x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \overset{\text{déf}}{=\!=} \forall x\ x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \overset{\text{déf}}{=\!=} E \subseteq F \land \exists x\ x \in F \land x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall x \; x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} E \subseteq F \land \exists x \; x \in F \land x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5\}$$

Inclusion

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, noté $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F

$$E \subseteq F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \forall x\ x \in E \Rightarrow x \in F$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5\}$$

Un ensemble E est strictement inclus dans un ensemble F, noté $E \subset F$ si E est inclus dans F et s'il existe un élément de F qui n'appartient pas à E

$$E \subset F \stackrel{\text{déf}}{=\!=} E \subseteq F \land \exists x\ x \in F \land x \notin E$$

Exemple :

$$\{0, 2, 4\} \subset \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5\}$$

Comparaison et opérations
Comparaison d'ensembles
Opérations sur les ensembles

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \overset{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \overset{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0,2\} \cup \{2,4\} = \{0,2,4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0,2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Union et intersection

L'union (ou réunion) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cup \{2, 4\} = \{0, 2, 4\}$

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Exemple : $\{0, 2\} \cap \{4\} = \varnothing$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \mathrm{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \mathsf{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \overset{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Différence et complémentaire

La **différence** A **moins** B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \mathsf{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le **complémentaire de** A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \overset{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 5 \land \mathrm{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \emptyset$

Différence et complémentaire

La différence A moins B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \overset{\text{déf}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemple : $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5 \wedge \text{est\_pair}(n)\} \setminus \{4\} = \{0, 2\}$

Le complémentaire de A, notée A^c (ou $\overline{A}$), est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c \overset{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{U} \setminus A$$

Exemple : $\mathrm{U}^c = \varnothing$

Plan du chapitre

Introduction

Comparaison et opérations

Définitions ensemblistes

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \overset{\text{déf}}{=\!=} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \overset{\text{déf}}{=\!=} x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \dots a_n\} \overset{\text{déf}}{=\!=} x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \overset{\text{déf}}{=\!=} \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \overset{\text{déf}}{=\!=} A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \stackrel{\text{déf}}{=} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \stackrel{\text{déf}}{=} x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \ldots a_n\} \stackrel{\text{déf}}{=} x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{=} \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \stackrel{\text{déf}}{=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \stackrel{\text{déf}}{=} A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \ldots a_n\} \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ x = a_1 \vee \ \ldots \ \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \ \underline{\underline{\text{déf}}}\ A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \ldots a_n\} \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \ldots a_n\} \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ \bot$

Complément : $x \in A \backslash B \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \ \stackrel{\text{déf}}{\equiv}\ A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \stackrel{\text{déf}}{\equiv} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \dots a_n\} \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{\equiv} \bot$

Complément : $x \in A \backslash B \stackrel{\text{déf}}{\equiv} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \stackrel{\text{déf}}{\equiv} A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x = a$ (singleton)
$x \in \{a_1, \ldots a_n\} \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \emptyset \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \stackrel{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \overset{\text{déf}}{=\!=} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :
$x \in \{a\} \overset{\text{déf}}{=\!=} x = a \quad$ (singleton)
$x \in \{a_1, \ldots a_n\} \overset{\text{déf}}{=\!=} x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \varnothing \overset{\text{déf}}{=\!=} \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \overset{\text{déf}}{=\!=} A \subseteq B$

Définitions ensemblistes

Langage : on se donne le prédicat binaire $\in$, notation infixe $x \in A$

Axiome d'extensionalité : $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Inclusion : $A \subseteq B \overset{\text{déf}}{=\!=} (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$

Intersection : $x \in A \cap B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge x \in B$

Union : $x \in A \cup B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \vee x \in B$

Définition par extension :

$x \in \{a\} \overset{\text{déf}}{=\!=} x = a$ (singleton)

$x \in \{a_1, \dots a_n\} \overset{\text{déf}}{=\!=} x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n$

Ensemble vide : $x \in \varnothing \overset{\text{déf}}{=\!=} \perp$

Complément : $x \in A \backslash B \overset{\text{déf}}{=\!=} x \in A \wedge \neg(x \in B)$

Ensemble des parties : $A \in \mathcal{P}(B) \overset{\text{déf}}{=\!=} A \subseteq B$