INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

INF122, compléments théoriques

Jean-François Monin, Cristian Ene

Université Joseph Fourier,
Grenoble I

2007

Cours 3

Plan du chapitre

Disjonction

Règles

Exemples

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités :

$$\dfrac{A}{A \vee B}\vee\mathrm{I}_1 \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\vee\mathrm{I}_2$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \vee B$

- on a $A \vee B$
  - supposant A ....(n)
    on démontre C
  - supposant B ...(m)
    on démontre C
- on infère alors C
  en levant (n) et (m)

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overbrace{B}^{[m]} \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\vee\mathrm{E}[n,m]$$

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités :

$$\frac{A}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_2$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \vee B$

- on a $A \vee B$
  - supposant A . . . . (n)
    on démontre C
  - supposant B . . . (m)
    on démontre C
- on infère alors C
  en levant (n) et (m)

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \overbrace{B}^{[m]} \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\,\vee\mathrm{E}[n,m]$$

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités :

$$\boxed{\dfrac{A}{A \lor B}\,\lor I_1 \qquad \dfrac{B}{A \lor B}\,\lor I_2}$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \lor B$

- on a $A \lor B$
  - supposant A . . . . (n) on démontre C
  - supposant B . . . (m) on démontre C
- on infère alors C en levant (n) et (m)

$$\boxed{\dfrac{A \lor B \qquad \begin{matrix}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overbrace{B}^{[m]}\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\lor E[n,m]}$$

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités :

$$\frac{A}{A \vee B}\vee I_1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee I_2$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \vee B$

- on a $A \vee B$
  - supposant A . . . . (n)
    on démontre C
  - supposant B . . . (m)
    on démontre C
- on infère alors C
  en levant (n) et (m)

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overbrace{B}^{[m]}\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\vee E[n,m]$$

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités :

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I_1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I_2$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \vee B$

- on a $A \vee B$
  - supposant A . . . . (n)
    on démontre C
  - supposant B . . . (m)
    on démontre C
- on infère alors C
  en levant (n) et (m)

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \overbrace{A}^{[n]} \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overbrace{B}^{[m]} \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ \vee E[n,m]$$

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion))

2 possibilités :

$$\boxed{\dfrac{A}{A \vee B}\,\vee I_1 \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,\vee I_2}$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \vee B$

- on a $A \vee B$
  - supposant A ....(n)
    on démontre C
  - supposant B ...(m)
    on démontre C
- on infère alors C
  en levant (n) et (m)

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix} \overbrace{}^{[n]} \\ A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \overbrace{}^{[m]} \\ B \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\,\vee E[n,m]$$

La disjonction

Règles d'introduction (conclusion)

2 possibilités :

$$\dfrac{A}{A \vee B}\,\vee I_1 \qquad\qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,\vee I_2$$

Règle d'élimination (utilisation)

Raisonnement par cas sur les 2 façons canoniques d'inférer $A \vee B$

- on a $A \vee B$
  - supposant A . . . .(n) on démontre C
  - supposant B . . . (m) on démontre C
- on infère alors C en levant (n) et (m)

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}\overbrace{A}^{[n]}\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overbrace{B}^{[m]}\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E[n,m]$$

Disjonction

Règles

Exemples

Exemple : route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse

$$
\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathrm{rg} \Rightarrow \mathrm{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{rv} \lor \mathrm{re}}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{rv} \Rightarrow \mathrm{rg}}^{1} \quad \overbrace{\mathrm{rv}}^{[5]}}{\mathrm{rg}} \Rightarrow \mathrm{E} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{re} \Rightarrow \mathrm{rg}}^{2} \quad \overbrace{\mathrm{re}}^{[6]}}{\mathrm{rg}} \Rightarrow \mathrm{E}}{\mathrm{rg}} \lor \mathrm{E}[5,6]}{\mathrm{rd}} \Rightarrow \mathrm{E}}{(\mathrm{rv} \lor \mathrm{re}) \Rightarrow \mathrm{rd}} \Rightarrow \mathrm{I}[4]
$$

Exemple : route (2)

Si la route est verglassée, elle est glissante ; si elle est enneigée elle est glissante ; elle est donc glissante dans les deux cas, et donc dangereuse ; il s'ensuit qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \vee \mathsf{re}}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg}}^{1} \qquad \overbrace{\mathsf{rv}}^{[5]}}{\mathsf{rg}}\Rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{re} \Rightarrow \mathsf{rg}}^{2} \qquad \overbrace{\mathsf{re}}^{[6]}}{\mathsf{rg}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{rg}}\vee\mathrm{E}[5,6]}{\mathsf{rd}}\Rightarrow\mathrm{E}}{(\mathsf{rv} \vee \mathsf{re}) \Rightarrow \mathsf{rd}}\Rightarrow\mathrm{I}[4]$$

Exemple : route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathrm{rv} \lor \mathrm{re}}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{rg} \Rightarrow \mathrm{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{rv} \Rightarrow \mathrm{rg}}^{1} \quad \overbrace{\mathrm{rv}}^{[5]}}{\mathrm{rg}} \Rightarrow \mathrm{E}}{\mathrm{rd}} \Rightarrow \mathrm{E} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{rg} \Rightarrow \mathrm{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathrm{re} \Rightarrow \mathrm{rg}}^{2} \quad \overbrace{\mathrm{re}}^{[6]}}{\mathrm{rg}} \Rightarrow \mathrm{E}}{\mathrm{rd}} \Rightarrow \mathrm{E}}{\mathrm{rd}} \lor \mathrm{E}[5,6]}{(\mathrm{rv} \lor \mathrm{re}) \Rightarrow \mathrm{rd}} \Rightarrow \mathrm{I}[4]$$

Exemple : route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \vee \mathsf{re}}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg}}^{1} \quad \overbrace{\mathsf{rv}}^{[5]}}{\mathsf{rg}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{rd}}\Rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{re} \Rightarrow \mathsf{rg}}^{2} \quad \overbrace{\mathsf{re}}^{[6]}}{\mathsf{rg}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{rd}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{rd}}\vee\mathrm{E}[5,6]}{(\mathsf{rv} \vee \mathsf{re}) \Rightarrow \mathsf{rd}}\Rightarrow\mathrm{I}[4]$$

Exemple : route (3)

Si la route est verglassée, elle est glissante, donc dangereuse ;
si elle est enneigée elle est glissante, donc dangereuse ;
elle est donc dangereuse dans les deux cas, ce qui signifie qu'une route verglassée ou enneigée est dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\text{rv} \lor \text{re}}^{[4]} \qquad \dfrac{\overbrace{\text{rg} \Rightarrow \text{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\text{rv} \Rightarrow \text{rg}}^{1} \qquad \overbrace{\text{rv}}^{[5]}}{\text{rg}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\text{rd}}\Rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overbrace{\text{rg} \Rightarrow \text{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\text{re} \Rightarrow \text{rg}}^{2} \qquad \overbrace{\text{re}}^{[6]}}{\text{rg}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\text{rd}}\Rightarrow\mathrm{E}}{\text{rd}}\lor\mathrm{E}[5,6]}{(\text{rv} \lor \text{re}) \Rightarrow \text{rd}}\Rightarrow\mathrm{I}[4]$$

Exemple : route (4)

Si la route est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg}}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \wedge \mathsf{re}}^{[4]}}{\mathsf{rv}}\,\wedge\mathrm{E}_1}{\mathsf{rg}}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{rd}}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{(\mathsf{rv} \wedge \mathsf{re}) \Rightarrow \mathsf{rd}}\,\Rightarrow\mathrm{I}[4]$$

Exemple : route (4)

Si la route est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{rg \Rightarrow rd}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \Rightarrow rg}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{rv \wedge re}^{[4]}}{rv}\,\wedge E_1}{rg}\,\Rightarrow E}{rd}\,\Rightarrow E}{(rv \wedge re) \Rightarrow rd}\,\Rightarrow I[4]$$

Exemple : route (4)

Si la route est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

$$
\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathsf{rg} \Rightarrow \mathsf{rd}}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \Rightarrow \mathsf{rg}}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{rv} \wedge \mathsf{re}}^{[4]}}{\mathsf{rv}}\,\wedge\mathrm{E}_1}{\mathsf{rg}}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{rd}}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{(\mathsf{rv} \wedge \mathsf{re}) \Rightarrow \mathsf{rd}}\,\Rightarrow\mathrm{I}[4]
$$

Commutativité de $\vee$: $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.

Pour démontrer $B \vee A$ essayons une règle d'introduction

$$\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{?}{A}}{B \vee A}\,\vee I_2}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Échec

Il faut commencer par éliminer l'hypothèse $A \vee B$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$: $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.

Pour démontrer $B \vee A$
essayons une
règle d'introduction

$$\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{?}{A}}{B \vee A}\,\vee I_2}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\Rightarrow I[1]$$

Échec

Il faut commencer
par éliminer
l'hypothèse $A \vee B$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$: $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.

Pour démontrer $B \vee A$
essayons une
règle d'introduction

$$\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{?}{A}}{B \vee A}\,\vee I_2}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\Rightarrow I[1]$$

Échec

Il faut commencer
par éliminer
l'hypothèse $A \vee B$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$: $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.

Pour démontrer $B \vee A$
essayons une
règle d'introduction

$$\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{?}{A}}{B \vee A}\,\vee I_2}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Échec

Il faut commencer
par éliminer
l'hypothèse $A \vee B$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$: $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.

Pour démontrer $B \vee A$
essayons une
règle d'introduction

$$\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{?}{A}}{B \vee A}\,\vee I_2}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Échec

Il faut commencer
par éliminer
l'hypothèse $A \vee B$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ .... (1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A .... (2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B .... (3)
  on a alors $B \vee A$

$$\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\vee I_1}{B \vee A}\vee E[2,3]$$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\vee I_1}{B \vee A}\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\lor$ (suite)

On démontre $B \lor A$ sous l'hypothèse $A \lor B$.

Supposons $A \lor B$ .... (1)

On analyse les 2 cas possibles

- supposons A .... (2)
  on a alors $B \lor A$
- supposons B .... (3)
  on a alors $B \lor A$

$$\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor \mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor \mathrm{I}_1}{B \lor A}\lor \mathrm{E}[2,3]$$

Dans chaque cas on a $B \lor A$, ce qui nous a permis de déduire $B \lor A$ de la seule hypothèse $A \lor B$. Il en résulte que $A \lor B$ implique $B \lor A$.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor \mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor \mathrm{I}_1}{B \lor A}\lor \mathrm{E}[2,3]}{(A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\Rightarrow \mathrm{I}[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ . . . . (1)

On analyse les 2 cas possibles

- supposons A . . . . (2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B . . . . (3)
  on a alors $B \vee A$

$$\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]$$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\lor$ (suite)

On démontre $B \lor A$ sous l'hypothèse $A \lor B$.
Supposons $A \lor B$ ....(1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A ....(2)
  on a alors $B \lor A$
- supposons B ....(3)
  on a alors $B \lor A$

$$\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor I_1}{B \lor A}\lor E[2,3]$$

Dans chaque cas on a $B \lor A$, ce qui nous a permis de déduire $B \lor A$ de la seule hypothèse $A \lor B$. Il en résulte que $A \lor B$ implique $B \lor A$.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\lor I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\lor I_1}{B \lor A}\lor E[2,3]}{(A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ ....(1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A ....(2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B ....(3)
  on a alors $B \vee A$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ . . . . (1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A . . . . (2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B . . . . (3)
  on a alors $B \vee A$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ . . . . (1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A . . . . (2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B . . . . (3)
  on a alors $B \vee A$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\overset{1}{\overbrace{A \vee B}} \qquad \dfrac{\overset{[2]}{\overbrace{A}}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{\overset{[3]}{\overbrace{B}}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}_1}{B \vee A}\,\vee\mathrm{E}[2,3]$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{[1]}{\overbrace{A \vee B}} \qquad \dfrac{\overset{[2]}{\overbrace{A}}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{\overset{[3]}{\overbrace{B}}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}_1}{B \vee A}\,\vee\mathrm{E}[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ . . . . (1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A . . . . (2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B . . . . (3)
  on a alors $B \vee A$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\vee I_1}{B \vee A}\vee E[2,3]$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\vee I_1}{B \vee A}\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\vee$ (suite)

On démontre $B \vee A$ sous l'hypothèse $A \vee B$.
Supposons $A \vee B$ .... (1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A .... (2)
  on a alors $B \vee A$
- supposons B .... (3)
  on a alors $B \vee A$

Dans chaque cas on a $B \vee A$, ce qui nous a permis de déduire $B \vee A$ de la seule hypothèse $A \vee B$. Il en résulte que $A \vee B$ implique $B \vee A$.

$$\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]$$

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \vee B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E[2,3]}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,\Rightarrow I[1]$$

Commutativité de $\lor$ (suite)

On démontre $B \lor A$ sous l'hypothèse $A \lor B$.
Supposons $A \lor B$ . . . . (1)
On analyse les 2 cas possibles

- supposons A . . . . (2)
  on a alors $B \lor A$
- supposons B . . . . (3)
  on a alors $B \lor A$

$$\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\,\lor\mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\,\lor\mathrm{I}_1}{B \lor A}\,\lor\mathrm{E}[2,3]$$

Dans chaque cas on a $B \lor A$, ce qui nous a permis de déduire $B \lor A$ de la seule hypothèse $A \lor B$. Il en résulte que $A \lor B$ implique $B \lor A$.

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{A \lor B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{A}^{[2]}}{B \lor A}\,\lor\mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{\overbrace{B}^{[3]}}{B \lor A}\,\lor\mathrm{I}_1}{B \lor A}\,\lor\mathrm{E}[2,3]}{(A \lor B) \Rightarrow (B \lor A)}\,\Rightarrow\mathrm{I}[1]$$

Plan du chapitre

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35... ;
  - symboles de prédicats P, Q, ... ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c :
    P(c)

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35... ;
  - symboles de prédicats P, Q, ... ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c : P(c)

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35... ;
  - symboles de prédicats P, Q, ... ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c : P(c)

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35... ;
  - symboles de prédicats P, Q, ... ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c :
    P(c)

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35... ;
  - symboles de prédicats P, Q, ... ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c : P(c)

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35... ;
  - symboles de prédicats P, Q, ... ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c :
    P(c)

Énoncés paramétrés

Problème

Beaucoup d'énoncés tels que D35v : « la D35 est verglassée »

Objectif : en fabriquer à volonté

Moyen : prédicats et constantes

- En langage courant : *être verglassé* est un prédicat portant sur des individus (en l'occurrence des routes)
- Formellement :
  - symboles d'individus (= de constantes) c, d, D35. . . ;
  - symboles de prédicats P, Q, . . . ;
  - étant donné un symbole de prédicat P,
    on obtient un énoncé pour chaque symbole de constante c :
    P(c)

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de relation) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de relation) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de relation) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de relation) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de relation) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Prédicats, relations

Exemple

- constantes : D35, D44, N7, N20, etc.
- prédicats : V (être verglassée), E (être enneigée), G (être glissante)
- D35v représenté par V(D35)

Généralisation

Symboles de prédicat (ou de relation) binaires, ternaires . . . n-aires

- va-de-à(N90, Bernin, Crolles) : la N90 va de Bernin à Crolles

Exemple : route (4)

Si la D35 est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

- V(D35) = la D35 est verglassée
- E(D35) = la D35 est enneigée
- G(D35) = la D35 est glissante
- D(D35) = la D35 est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{G(D35) \Rightarrow D(D35)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{V(D35) \Rightarrow G(D35)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{V(D35) \wedge E(D35)}^{[4]}}{V(D35)}\,{\wedge}E_1}{G(D35)}\,{\Rightarrow}E}{D(D35)}\,{\Rightarrow}E}{V(D35) \wedge E(D35) \Rightarrow D(D35)}\,{\Rightarrow}I[4]$$

Exemple : route (4)

Si la D35 est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

- $V(D35)$ = la D35 est verglassée
- $E(D35)$ = la D35 est enneigée
- $G(D35)$ = la D35 est glissante
- $D(D35)$ = la D35 est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{G(D35) \Rightarrow D(D35)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{V(D35) \Rightarrow G(D35)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{V(D35) \wedge E(D35)}^{[4]}}{V(D35)}\,\wedge E_1}{G(D35)}\,\Rightarrow E}{D(D35)}\,\Rightarrow E}{V(D35) \wedge E(D35) \Rightarrow D(D35)}\,\Rightarrow I[4]$$

Exemple : route (4)

Si la D35 est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

- $V(D35)$ = la D35 est verglassée
- $E(D35)$ = la D35 est enneigée
- $G(D35)$ = la D35 est glissante
- $D(D35)$ = la D35 est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{G(D35) \Rightarrow D(D35)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{V(D35) \Rightarrow G(D35)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{V(D35) \wedge E(D35)}^{[4]}}{V(D35)}\,{\scriptstyle \wedge E_1}}{G(D35)}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{D(D35)}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{V(D35) \wedge E(D35) \Rightarrow D(D35)}\,{\scriptstyle \Rightarrow I[4]}$$

Exemple : route (4)

Si la D35 est verglassée et enneigée, elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

- $\mathsf{V}(\mathsf{D35})$ = la D35 est verglassée
- $\mathsf{E}(\mathsf{D35})$ = la D35 est enneigée
- $\mathsf{G}(\mathsf{D35})$ = la D35 est glissante
- $\mathsf{D}(\mathsf{D35})$ = la D35 est dangereuse

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathsf{G}(\mathsf{D35}) \Rightarrow \mathsf{D}(\mathsf{D35})}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(\mathsf{D35}) \Rightarrow \mathsf{G}(\mathsf{D35})}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(\mathsf{D35}) \wedge \mathsf{E}(\mathsf{D35})}^{[4]}}{\mathsf{V}(\mathsf{D35})}\,\wedge\mathrm{E}_1}{\mathsf{G}(\mathsf{D35})}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{D}(\mathsf{D35})}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{V}(\mathsf{D35}) \wedge \mathsf{E}(\mathsf{D35}) \Rightarrow \mathsf{D}(\mathsf{D35})}\,\Rightarrow\mathrm{I}[4]$$

Variables

- Énoncés paramétrés
- Prédicats, relations
- Variable
- Énoncé, formule paramétrée

Variable

Le raisonnement précédent peut être reproduit à l'identique en remplaçant D35 par n'importe quelle autre constante.

Variable = symbole représentant une constante non figée

Notation : x, y, z, ...

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\mathsf{G}(x) \Rightarrow \mathsf{D}(x)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(x) \Rightarrow \mathsf{G}(x)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(x) \wedge \mathsf{E}(x)}^{[4]}}{\mathsf{V}(x)}\,\wedge\mathrm{E}_1}{\mathsf{G}(x)}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{D}(x)}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\mathsf{V}(x) \wedge \mathsf{E}(x) \Rightarrow \mathsf{D}(x)}\,\Rightarrow\mathrm{I}[4]$$

On pourra substituer une constante à une variable dans certaines circonstances

Variable

Le raisonnement précédent peut être reproduit à l'identique en remplaçant D35 par n'importe quelle autre constante.

Variable = symbole représentant une constante non figée

Notation : x, y, z, ...

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \overbrace{\mathsf{G}(x) \Rightarrow \mathsf{D}(x)}^{3}
    \qquad
    \dfrac{
      \overbrace{\mathsf{V}(x) \Rightarrow \mathsf{G}(x)}^{1}
      \qquad
      \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(x) \land \mathsf{E}(x)}^{[4]}}{\mathsf{V}(x)}\,{\land}\mathrm{E}_1
    }{\mathsf{G}(x)}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}
  }{\mathsf{D}(x)}\,{\Rightarrow}\mathrm{E}
}{\mathsf{V}(x) \land \mathsf{E}(x) \Rightarrow \mathsf{D}(x)}\,{\Rightarrow}\mathrm{I}[4]
$$

On pourra substituer une constante à une variable dans certaines circonstances

Variable

Le raisonnement précédent peut être reproduit à l'identique en remplaçant D35 par n'importe quelle autre constante.

Variable = symbole représentant une constante non figée

Notation : x, y, z, ...

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{G(x) \Rightarrow D(x)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{V(x) \Rightarrow G(x)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{V(x) \wedge E(x)}^{[4]}}{V(x)}\,{\scriptstyle \wedge E_1}}{G(x)}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{D(x)}\,{\scriptstyle \Rightarrow E}}{V(x) \wedge E(x) \Rightarrow D(x)}\,{\scriptstyle \Rightarrow I[4]}$$

On pourra substituer une constante à une variable dans certaines circonstances

Variable

Le raisonnement précédent peut être reproduit à l'identique en remplaçant D35 par n'importe quelle autre constante.

Variable = symbole représentant une constante non figée

Notation : x, y, z, ...

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{G(x) \Rightarrow D(x)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{V(x) \Rightarrow G(x)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{V(x) \wedge E(x)}^{[4]}}{V(x)}\,\wedge E_1}{G(x)}\,\Rightarrow E}{D(x)}\,\Rightarrow E}{V(x) \wedge E(x) \Rightarrow D(x)}\,\Rightarrow I[4]$$

On pourra substituer une constante à une variable dans certaines circonstances

Variable

Le raisonnement précédent peut être reproduit à l'identique en remplaçant D35 par n'importe quelle autre constante.

Variable = symbole représentant une constante non figée

Notation : x, y, z, ...

$$\dfrac{\overbrace{\mathsf{G}(x) \Rightarrow \mathsf{D}(x)}^{3} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(x) \Rightarrow \mathsf{G}(x)}^{1} \qquad \dfrac{\overbrace{\mathsf{V}(x) \wedge \mathsf{E}(x)}^{[4]}}{\mathsf{V}(x)}\,\wedge\mathrm{E}_1}{\mathsf{G}(x)}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\dfrac{\mathsf{D}(x)}{\mathsf{V}(x) \wedge \mathsf{E}(x) \Rightarrow \mathsf{D}(x)}\,\Rightarrow\mathrm{I}[4]}\,\Rightarrow\mathrm{E}$$

On pourra substituer une constante à une variable dans certaines circonstances

Énoncé, formule paramétrée

Énoncé

- G(D35) : la D35 est glissante
- G(N90) : la N90 est glissante

Formule paramétrée

- G(x) : la route x est glissante

Énoncé, formule paramétrée

Énoncé

- G(D35) : la D35 est glissante
- G(N90) : la N90 est glissante

Formule paramétrée

- G(x) : la route x est glissante

Énoncé, formule paramétrée

Énoncé

- G(D35) : la D35 est glissante
- G(N90) : la N90 est glissante

Formule paramétrée

- G(x) : la route x est glissante

Plan du chapitre

Formule universelle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\forall x G(x)$	– quel que soit x, x est glissante – pour tout G(x), G(x) est glissant(e) – toutes les routes sont glissantes

$\forall$ est le quantificateur universel

Dans $\forall x G(x)$, la variable x est quantifiée universellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\forall x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\forall x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\forall x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\forall x G(x) \Rightarrow \forall x D(x)$	$\forall x [G(x) \Rightarrow [\forall x D(x)]]$

Formule universelle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\forall x G(x)$	– quel que soit x, x est glissante – pour tout G(x), G(x) est glissant(e) – toutes les routes sont glissantes

$\forall$ est le quantificateur universel

Dans $\forall x G(x)$, la variable x est quantifiée universellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\forall x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\forall x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\forall x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\forall x G(x) \Rightarrow \forall x D(x)$	$\forall x [G(x) \Rightarrow [\forall x D(x)]]$

Formule universelle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\forall x G(x)$	– quel que soit x, x est glissante – pour tout G(x), G(x) est glissant(e) – toutes les routes sont glissantes

$\forall$ est le quantificateur universel

Dans $\forall x G(x)$, la variable x est quantifiée universellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\forall x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\forall x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\forall x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\forall x G(x) \Rightarrow \forall x D(x)$	$\forall x[G(x) \Rightarrow [\forall x D(x)]]$

Formule universelle

Définitions

L'énoncé	se lit indifféremment
$\forall x G(x)$	– quel que soit x, x est glissante – pour tout $G(x)$, $G(x)$ est glissant(e) – toutes les routes sont glissantes

$\forall$ est le quantificateur universel

Dans $\forall x G(x)$, la variable x est quantifiée universellement

Portée du quantificateur : le plus à droite possible

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$	$\forall x\ [G(x) \Rightarrow D(x)]$
$(\forall x G(x)) \Rightarrow D(x)$	$[\forall x G(x)] \Rightarrow D(x)$
$\forall x G(x) \Rightarrow \forall x D(x)$	$\forall x [G(x) \Rightarrow [\forall x D(x)]]$

Élimination (utilisation) d'une formule universelle

De $\forall x\ G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_E(\tfrac{x}{t})$$

t représente une constante ou une variable

$G(t)$ représente la formule $G(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x

« libre » : voir plus loin

Élimination (utilisation) d'une formule universelle

De $\forall x\ G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

t représente une constante ou une variable

$G(t)$ représente la formule $G(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x

« libre » : voir plus loin

Élimination (utilisation) d'une formule universelle

De $\forall x\ G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

t représente une constante ou une variable

$G(t)$ représente la formule $G(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x

« libre » : voir plus loin

Élimination (utilisation) d'une formule universelle

De $\forall x\ G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

t représente une constante ou une variable

$G(t)$ représente la formule $G(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x

« libre » : voir plus loin

Élimination (utilisation) d'une formule universelle

De $\forall x\ G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

t représente une constante ou une variable

$G(t)$ représente la formule $G(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x

« libre » : voir plus loin

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire G(D35), G(N90), G(N7), ... en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire G(D35), G(N90), G(N7), ... en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ... en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Anonymat

Le nom d'une variable quantifiée n'est pas significatif

- $\forall x G(x)$ = toutes les routes sont glissantes
- $\forall y G(y)$ = toutes les routes sont glissantes

$\rightarrow$ $\forall x G(x)$ et $\forall y G(y)$ ont même interprétation

- De $\forall x G(x)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
  en substituant à x les constantes D35, N90, N7, ...
- De $\forall y G(y)$ on peut déduire $G(D35)$, $G(N90)$, $G(N7)$, ...
  en substituant à y les constantes D35, N90, N7, ...

$\rightarrow$ On déduit les mêmes énoncés de $\forall x G(x)$ que de $\forall y G(y)$

Introduction du quantificateur universel

Objectif :

démontrer que pour tout x, $P(x)$

Méthode :

- soit x quelconque
- on démontre $P(x)$
  attention : x doit rester quelconque, en particulier les hypothèses éventuellement faites sur x doivent être levées
- on infère $\forall x\, P(x)$

Introduction du quantificateur universel

Objectif :

démontrer que pour tout x, $\mathrm{P}(x)$

Méthode :

- soit x quelconque
- on démontre $\mathrm{P}(x)$

  attention : doit rester quelconque, en particulier les hypothèses éventuellement faites sur doivent être levées
- on infère $\forall x\ \mathrm{P}(x)$

Introduction du quantificateur universel

Objectif :

démontrer que pour tout x, $P(x)$

Méthode :

- soit x quelconque
- on démontre $P(x)$

  attention : x doit rester quelconque, en particulier les hypothèses éventuellement faites sur x doivent être levées
- on infère $\forall x\ P(x)$

Introduction du quantificateur universel

Objectif :

démontrer que pour tout x, $\mathrm{P}(x)$

Méthode :

- soit x quelconque
- on démontre $\mathrm{P}(x)$
  attention : x doit rester quelconque, en particulier les hypothèses éventuellement faites sur x doivent être levées
- on infère $\forall x\ \mathrm{P}(x)$

Introduction du quantificateur universel

Objectif :

démontrer que pour tout x, $P(x)$

Méthode :

- soit x quelconque
- on démontre $P(x)$
  attention : x doit rester quelconque, en particulier les hypothèses éventuellement faites sur x doivent être levées
- on infère $\forall x \; P(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $P(x)$, on a $Q(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $P(x)$, on a $Q(x)$

- soit x quelconque
  - supposons $P(x)$
  - on démontre $Q(x)$
- on infère $P(x) \Rightarrow Q(x)$
- on infère $\forall x \, [P(x) \Rightarrow Q(x)]$
  notation : $\forall x \, P(x) \Rightarrow Q(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $\mathsf{P}(x)$, on a $\mathsf{Q}(x)$

- soit x quelconque
  - supposons $\mathsf{P}(x)$
  - on démontre $\mathsf{Q}(x)$
- on infère $\mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)$
- on infère $\forall x\ [\mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)]$
  notation : $\forall x\ \mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $\mathsf{P}(x)$, on a $\mathsf{Q}(x)$

- soit x quelconque
  - supposons $\mathsf{P}(x)$
  - on démontre $\mathsf{Q}(x)$
- on infère $\mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)$
- on infère $\forall x\ [\mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)]$
  notation : $\forall x\ \mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $\mathrm{P}(x)$, on a $\mathrm{Q}(x)$

- soit x quelconque
  - supposons $\mathrm{P}(x)$
  - on démontre $\mathrm{Q}(x)$
- on infère $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$
- on infère $\forall x\ [\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)]$

  notation : $\forall x\ \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$

Situation fréquente

Pour tout x tel que $P(x)$, on a $Q(x)$

- soit x quelconque
  - supposons $P(x)$
  - on démontre $Q(x)$
- on infère $P(x) \Rightarrow Q(x)$
- on infère $\forall x\ [P(x) \Rightarrow Q(x)]$
  notation : $\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « » ;
  ces deux formules dépendent de
  ces deux formules sont paramétrées par
  est libre dans ces deux formules ;
  plus précisément son occurrence dans D( ) est libre
  (son occurrence dans ∀ G( ) est liée)

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « » ;

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « » ;

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « »;
  ces deux formules dépendent de x
  ces deux formules sont paramétrées par x
  x est libre dans ces deux formules ;
  plus précisément son occurrence dans $D(x)$ est libre
  (son occurrence dans $\forall x\ G(x)$ est liée)

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « si toutes les routes sont glissantes, alors x est dangereuse » ;
  ces deux formules dépendent de x
  ces deux formules sont paramétrées par x
  x est libre dans ces deux formules ;
  plus précisément son occurrence dans $D(x)$ est libre
  (son occurrence dans $\forall x\ G(x)$ est liée)

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « si toutes les routes sont glissantes, alors x est dangereuse » ;
  ces deux formules dépendent de x
  ces deux formules sont paramétrées par x
  x est libre dans ces deux formules ;
  plus précisément son occurrence dans $D(x)$ est libre
  (son occurrence dans $\forall x\ G(x)$ est liée)

Gestion des variables

- $\forall x\ G(x)$ identique à $\forall y\ G(y)$:
  dans ces formules x et y sont des variables **liées**
- $G(x)$ non identique à $G(y)$
  par exemple on a $G(x) \Rightarrow D(x)$ mais pas $G(y) \Rightarrow D(x)$
  (x est dangereuse si x est glissante,
  pas nécessairement si y est glissante) ;
  dans ces formules x et y sont des variables **libres**
- mais $[\forall x\ G(x)] \Rightarrow D(x)$ reste identique à $[\forall y\ G(y)] \Rightarrow D(x)$:
  ces deux formules signifient
  « si toutes les routes sont glissantes, alors x est dangereuse » ;
  ces deux formules dépendent de x
  ces deux formules sont paramétrées par x
  x est libre dans ces deux formules ;
  plus précisément son occurrence dans $D(x)$ est libre
  (son occurrence dans $\forall x\ G(x)$ est liée)

Variable fraîche

Il arrive que l'on doive démontrer $\forall x\ P(x)$ sous des hypothèses comportant déjà des occurrences libres de x.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(x)}^{h_1}\ldots\overbrace{H_n(y)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(x)\end{array}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I$$

Pour évacuer ce problème potentiel, on effectue systématiquement un renommage de x en choisissant une variable x_0 dite fraîche (c-à-d. non encore utilisée) :

- « soit x_0 un individu sur lequel on n'a aucune hypothèse, démontrons $P(x_0)$. »

Variable fraîche

Il arrive que l'on doive démontrer $\forall x\ P(x)$ sous des hypothèses comportant déjà des occurrences libres de x.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(x)}^{h_1}\dots\overbrace{H_n(y)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(\ \ )\end{array}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I$$

Pour évacuer ce problème potentiel, on effectue systématiquement un renommage de x en choisissant une variable x_0 dite fraîche (c-à-d. non encore utilisée) :

- « soit x_0 un individu sur lequel on n'a aucune hypothèse, démontrons $P(x_0)$. »

Variable fraîche

Il arrive que l'on doive démontrer $\forall x\ P(x)$ sous des hypothèses comportant déjà des occurrences libres de x.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(x)}^{h_1}\ldots\overbrace{H_n(y)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(\ ?\ )\end{array}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I$$

Pour évacuer ce problème potentiel, on effectue systématiquement un renommage de x en choisissant une variable x_0 dite fraîche (c-à-d. non encore utilisée) :

- « soit x_0 un individu sur lequel on n'a aucune hypothèse, démontrons $P(x_0)$. »

Variable fraîche

Il arrive que l'on doive démontrer $\forall x\ P(x)$ sous des hypothèses comportant déjà des occurrences libres de x.

$$\dfrac{\overbrace{H_1(x)}^{h_1} \ldots \overbrace{H_n(y)}^{h_n} \atop {\vdots \atop P(\,?\,)}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I$$

Pour évacuer ce problème potentiel, on effectue systématiquement un renommage de x en choisissant une variable x_0 dite fraîche (c-à-d. non encore utilisée) :

- « soit x_0 un individu sur lequel on n'a aucune hypothèse, démontrons $P(x_0)$. »

Variable fraîche

Il arrive que l'on doive démontrer $\forall x\ P(x)$ sous des hypothèses comportant déjà des occurrences libres de x.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{H_1(x)}^{h_1}\ldots\overbrace{H_n(y)}^{h_n}\\ \vdots \\ P(\,?\,)\end{array}}{\forall x\ P(x)}\ \forall_I$$

Pour évacuer ce problème potentiel, on effectue systématiquement un renommage de x en choisissant une variable x_0 dite fraîche (c-à-d. non encore utilisée) :

- « soit x_0 un individu sur lequel on n'a aucune hypothèse, démontrons $P(x_0)$. »

Introduction et élimination de $\forall$

$$\begin{array}{c} \overbrace{H_1(\_)}^{h_1} \ldots \overbrace{H_n(\_)}^{h_n} \\ \vdots \\ \dfrac{P(x_0)}{\forall x\ P(x)}\ \forall_{\mathrm{I}} \end{array} \qquad \dfrac{\forall x\ P(x)}{P(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}\left(\tfrac{x}{t}\right)$$

Condition d'application de $\forall_{\mathrm{I}}$: x_0 ne doit être libre dans aucune des hypothèses disponibles $h_1 \ldots h_n$

Dans $\forall_{\mathrm{E}}$

t représente une constante ou une variable
(dans le cas général : un terme ; *vu plus tard*)
$P(t)$ représente la formule $P(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x.

Introduction et élimination de $\forall$

$$\dfrac{\begin{matrix}\overbrace{\mathrm{H}_1(\_)}^{h_1}\ldots\overbrace{\mathrm{H}_n(\_)}^{h_n}\\ \vdots \\ \mathrm{P}(x_0)\end{matrix}}{\forall x\ \mathrm{P}(x)}\ \forall_{\mathrm{I}}$$

$$\dfrac{\forall x\ \mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

Condition d'application de $\forall_{\mathrm{I}}$: x_0 ne doit être libre dans aucune des hypothèses disponibles $h_1 \ldots h_n$

Dans $\forall_{\mathrm{E}}$

t représente une constante ou une variable
(dans le cas général : un terme ; *vu plus tard*)

$\mathrm{P}(t)$ représente la formule $\mathrm{P}(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x.

Introduction et élimination de $\forall$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{\mathrm{H_1}(\_)}^{h_1}\ldots\overbrace{\mathrm{H_n}(\_)}^{h_n}\\ \vdots \\ \mathrm{P}(x_0)\end{array}}{\forall x\ \mathrm{P}(x)}\ \forall_{\mathrm{I}}$$

$$\dfrac{\forall x\ \mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(t)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{t})$$

Condition d'application de $\forall_{\mathrm{I}}$: x_0 ne doit être libre dans aucune des hypothèses disponibles $h_1 \ldots h_n$

Dans $\forall_{\mathrm{E}}$

t représente une constante ou une variable
(dans le cas général : un terme ; *vu plus tard*)
$\mathrm{P}(t)$ représente la formule $\mathrm{P}(x)$ dans laquelle on a substitué t à toutes les occurrences libres de x.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

Une (= toute) route glissante est dangereuse

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

$\forall x \; V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)

Une (= toute) route glissante est dangereuse

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

$\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)

Une (= toute) route glissante est dangereuse

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante
$\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)
Une (= toute) route glissante est dangereuse
$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)
Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante
$\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)
Une (= toute) route glissante est dangereuse
$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)
Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

$\forall x\, V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)

Une (= toute) route glissante est dangereuse

$\forall x\, G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  $V(r_0) \wedge E(r_0)$ .... (4)

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante
$\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)
Une (= toute) route glissante est dangereuse
$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)
Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée
  $V(r_0) \wedge E(r_0)$ .... (4)
  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

$\forall x\, V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)

Une (= toute) route glissante est dangereuse

$\forall x\, G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  $V(r_0) \wedge E(r_0)$ .... [4]

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.

Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Retour sur la route (4) : généralisation

Une (= toute) route verglassée est glissante

$\forall x\ V(x) \Rightarrow G(x)$ .... (1)

Une (= toute) route glissante est dangereuse

$\forall x\ G(x) \Rightarrow D(x)$ .... (3)

Si une route quelconque est verglassée et enneigée,
elle est verglassée, donc glissante, donc dangereuse.

Soit r_0 une route quelconque.

- Supposons r_0 verglassée et enneigée

  $V(r_0) \wedge E(r_0)$ .... [4]

  On en déduit que r_0 est dangereuse

Donc : r_0 est verglassée et enneigée implique que r_0 est dangereuse.
Il en résulte que toute route verglassée et enneigée est dangereuse.

Exemple : route (4)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\overbrace{\forall x \ \ G(x) \Rightarrow D(x)}^{3}}{G(r_0) \ \Rightarrow D(r_0)}\ \forall_{\mathrm{E}}\left(\tfrac{x}{r_0}\right)
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{\overbrace{\forall x \ \ V(x) \Rightarrow G(x)}^{1}}{V(r_0) \ \Rightarrow G(r_0)}\ \forall_{\mathrm{E}}\left(\tfrac{x}{r_0}\right)
      \qquad
      \dfrac{\overbrace{V(r_0) \ \wedge \ E(r_0)}^{[4]}}{V(r_0)}
    }{G(r_0)}\ \Rightarrow\mathrm{E}
  }{
    \dfrac{D(r_0)}{V(r_0) \wedge E(r_0) \ \Rightarrow D(r_0)}\ \Rightarrow\mathrm{I}[4]
  }\ \Rightarrow\mathrm{E}
}{\forall r \ \ V(r) \wedge E(r) \ \Rightarrow D(r)}\ \forall_{\mathrm{I}}
$$