

INF122b 2005-2006 Devoir surveillé Corrigé

La durée de ce devoir est de 60 minutes. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (5 pts)

On donne l'arbre de preuve incomplet suivant :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overbrace{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}^{[1]} \wedge E1}{A \vee C} \quad \frac{\overbrace{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}^{[1]} \wedge E2}{B \vee C} \quad \frac{\overbrace{A}^{[2]} \quad \overbrace{B}^{[3]} \wedge I}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{\overbrace{C}^{[4]}}{(A \wedge B) \vee C} \vee I2 \\
 \frac{\overbrace{(A \vee C) \wedge (B \vee C)}^{[1]} \wedge E2}{(A \wedge B) \vee C} \vee I1 \quad \frac{\overbrace{C}^{[4]}}{(A \wedge B) \vee C} \vee I2 \quad \frac{\overbrace{C}^{[5]}}{(A \wedge B) \vee C} \vee I2 \\
 \hline
 \frac{(A \wedge B) \vee C}{(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C} \Rightarrow I[1]
 \end{array}$$

Pour chacune des inférences, donner le nom de la règle employée, en précisant, le cas échéant, le numéro des hypothèses levées.

Pour chaque feuille de l'arbre, indiquer si l'hypothèse associée a été levée ou non (rayer les hypothèses levées, entourer les hypothèses restantes).

Réponse : toutes les hypothèses (les numéros entre crochets) sont à rayer

La conclusion de cet arbre de preuve est-elle un théorème ? *Oui*

Pourquoi ?

Réponse : car les règles sont correctement employées et toutes les hypothèses sont levées.

Pour les exercices suivants, il s'agit de démontrer une proposition logique en déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve. Dans les arbres de preuves demandés, vous veillerez à bien noter le nom de chacune des règles utilisées et, le cas échéant, à indiquer les hypothèses levées.

Exercice 2 (5 pts)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overbrace{A \vee B}^{[3]} \quad \overbrace{A}^{[4]}}{C} \wedge E1 \quad \frac{\overbrace{(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)}^{[2]} \wedge E1}{A \Rightarrow C} \Rightarrow E \quad \frac{\overbrace{B}^{[5]} \quad \overbrace{(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)}^{[2]} \wedge E2}{B \Rightarrow C} \Rightarrow E \\
 \frac{\overbrace{A \vee B}^{[3]} \quad \overbrace{A}^{[4]}}{C} \wedge E1 \quad \frac{\overbrace{B}^{[5]} \quad \overbrace{(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)}^{[2]} \wedge E2}{C} \vee E[4,5] \quad \frac{\overbrace{C \Rightarrow (A \wedge B)}^{[1]}}{C \Rightarrow (A \wedge B)} \Rightarrow E \\
 \hline
 \frac{A \wedge B}{(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)} \Rightarrow I[3] \\
 \frac{(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)}{[(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)]} \Rightarrow I[2] \\
 \frac{[(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)]}{[C \Rightarrow (A \wedge B)] \Rightarrow [(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)]} \Rightarrow I[1]
 \end{array}$$

Exercice 3 (3 pts)

$$\frac{\frac{\frac{A}{[2]} \quad \frac{B}{[3]}}{A \wedge B} \wedge_I \quad \frac{(A \wedge B) \Rightarrow C}{[1]}}{\frac{C}{\Rightarrow_I[3]} \Rightarrow_E} \Rightarrow_E$$

$$\frac{\frac{B \Rightarrow C}{\Rightarrow_I[2]}}{[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]} \Rightarrow_I[1]$$

$$\frac{[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]}{[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 4 (3 pts)

$$\frac{\frac{\frac{P(a)}{[2]} \quad \frac{\frac{\forall x P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)}{[1]}}{P(a) \Rightarrow \forall y Q(y)} \forall_E(\frac{x}{a})}{\forall y Q(y)} \forall_E(\frac{y}{a})}{Q(a)} \Rightarrow_I[2]$$

$$\frac{P(a) \Rightarrow Q(a)}{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))} \forall_I$$

$$\frac{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))}{[\forall x P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)] \Rightarrow [\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))]} \Rightarrow_I[1]$$

Exercice 5 (4 pts)

Version avec règles abrégées

$$\frac{\frac{\frac{a \in A}{[4]} \quad \frac{A \subseteq B}{[1]}}{a \in B} \subseteq \forall_E \Rightarrow_E \quad \frac{B \subseteq C}{[2]}}{a \in C} \subseteq \forall_E \Rightarrow_E$$

$$\frac{\frac{a \in C \cap A}{[4]} \quad \frac{a \in A}{[3]} \wedge_I \quad \frac{B \cap A = \emptyset}{[5]} \emptyset \text{ déf}}{a \in \emptyset} \Rightarrow_E$$

$$\frac{\frac{a \in \emptyset}{[5]} \perp \text{ déf}}{a \in A} \perp_E$$

$$\frac{\frac{A = \emptyset}{(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)} \Rightarrow_I[3]}{(B \subseteq C) \Rightarrow [(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)]} \Rightarrow_I[2]$$

$$\frac{(B \subseteq C) \Rightarrow [(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)]}{(A \subseteq B) \Rightarrow [(B \subseteq C) \Rightarrow [(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)]]} \Rightarrow_I[1]$$

Version avec règles élémentaires

$$\frac{\frac{\frac{a \in A}{[4]} \quad \frac{\frac{A \subseteq B}{[1]} \subseteq \text{déf}}{\forall x x \in A \Rightarrow x \in B} \forall_E(\frac{x}{a})}{a \in A \Rightarrow a \in B} \Rightarrow_E}{a \in B} \Rightarrow_E$$

$$\frac{\frac{\frac{B \subseteq C}{[2]} \subseteq \text{déf}}{\forall x x \in B \Rightarrow x \in C} \forall_E(\frac{x}{a})}{a \in B \Rightarrow a \in C} \Rightarrow_E$$

$$\frac{\frac{a \in C \wedge a \in A}{[4]} \wedge_I \quad \frac{B \cap A = \emptyset}{[5]} \emptyset \text{ déf}}{a \in C \cap A} \Rightarrow_E$$

$$\frac{\frac{a \in \emptyset}{[5]} \perp \text{ déf}}{a \in A} \perp_E$$

$$\frac{\frac{a \in \emptyset}{(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)} \Rightarrow_I[3]}{(B \subseteq C) \Rightarrow [(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)]} \Rightarrow_I[2]$$

$$\frac{(B \subseteq C) \Rightarrow [(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)]}{(A \subseteq B) \Rightarrow [(B \subseteq C) \Rightarrow [(C \cap A = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)]]} \Rightarrow_I[1]$$