INF122 2005-2006 Épreuve terminale Corrigé

La durée de cette épreuve est de 60 mn. Aucun document n'est autorisé mais un aide-mémoire des règles permises est joint à l'énoncé. Le barème est indicatif.

Les énoncés munis d'étoiles (*) sont plus difficiles et **il est conseillé de ne leur consacrer du temps qu'après les autres**.

Sauf consigne explicite, on demande dans chaque exercice de démontrer un énoncé situé en bas de l'espace alloué à la réponse, chaque démonstration pouvant-être rédigée soit sous forme d'arbre de preuve, soit sous forme textuelle. Dans tous les cas il sera tenu le plus grand compte du soin et de la précision apportés dans la présentation des réponses. Ainsi, dans les arbres de preuve, indiquer systématiquement les règles utilisées, et, lorsqu'il y en a, les numéros des hypothèses levées. Dans le cas de la règle $\forall_E$, indiquer la substitution employée.

Un bonus de 2 points est réservé à l'utilisation (correcte) de règles condensées. En dehors des règles de ce genre rappelées dans l'aide-mémoire, on pourra condenser l'emploi successif de plusieurs règles $\forall_E$ (toujours en indiquant les substitutions employées). Exemple illustratif :

$$\frac{\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x+y)+z = x+(y+z)}{(3+1)+a = 3+(1+a)}\ \forall_{\mathrm{E}}(x{=}3,\, y{=}1,\, z{=}a)$$

On pourra aussi condenser l'emploi successif de plusieurs règles $\Rightarrow_I$ (toujours en indiquant les hypothèses levées). Exemple illustratif (rappel : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ se lit $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$) :

$$\frac{\begin{array}{c}\overbrace{P}^{[1]} \ \ldots\ \overbrace{Q}^{[2]} \\ \vdots \\ R\end{array}}{P \Rightarrow Q \Rightarrow R}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1,2]$$

Exercice 1 (2 pts ; arbre de preuve obligatoire)

Dans cet exercice, P est un symbole de proposition et Q est un symbole de prédicat à une variable.

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P}^{[2]} \qquad \overbrace{P \Rightarrow \forall x\ Q(x)}^{[1]}}{\forall x\ Q(x)}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}}{Q(x_0)}\ \forall_{\mathrm{E}}(\tfrac{x}{x_0})}{P \Rightarrow Q(x_0)}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}}[2]}{\forall x\ P \Rightarrow Q(x)}\ \forall_{\mathrm{I}}}{[P \Rightarrow \forall x\ Q(x)] \Rightarrow [\forall x\ P \Rightarrow Q(x)]}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]$$

Exercice 2 ** (2 pts)

Supposons que, dans l'exercice précédent, le symbole P représente cette fois une formule. Quelle condition doit respecter P pour que l'arbre de preuve soit encore correct ?

Corrigé

Il faut que P ne contienne pas d'occurrence libre de x : P serait alors de la forme $R(x)$, et la présence de l'hypothèse non levée [1] interdirait la possobilité d'effectuer $\forall_{\mathrm{I}}$.

Exercice 3 (2 pts)

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{x \in A \cup B}^{[1]} \qquad \dfrac{\overbrace{x \in A}^{[2]}}{x \in B \cup A}\,{\scriptstyle \vee_{\mathrm{I2}}\cup} \qquad \dfrac{\overbrace{x \in B}^{[3]}}{x \in B \cup A}\,{\scriptstyle \vee_{\mathrm{I1}}\cup}}{x \in B \cup A}\,{\scriptstyle \cup\vee_{\mathrm{E}}[2,3]}}{(A \cup B) \subseteq (B \cup A)}\,{\scriptstyle \subseteq[1]}}{\forall X\ \forall Y\ (X \cup Y) \subseteq (Y \cup X)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}$$

Exercice 4 (2 pts)

Corrigé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{x \in A}^{[2]} \qquad \dfrac{\overbrace{(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)}^{[1]}}{A \subseteq B}\,{\scriptstyle \wedge_{\mathrm{E1}}}}{x \in B}\,{\scriptstyle \subseteq\forall_{\mathrm{E}}\Rightarrow_{\mathrm{E}}} \qquad \dfrac{\overbrace{x \in B}^{[3]} \qquad \dfrac{\overbrace{(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)}^{[1]}}{B \subseteq A}\,{\scriptstyle \wedge_{\mathrm{E2}}}}{x \in A}\,{\scriptstyle \subseteq\forall_{\mathrm{E}}\Rightarrow_{\mathrm{E}}}}{A = B}\,{\scriptstyle \mathrm{ext}[2,3]}}{[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)] \Rightarrow A = B}\,{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{I}}[1]}}{\forall X\ \forall Y\ [(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \Rightarrow X = Y}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}$$

Exercice 5 ** (4 pts)

Pour cet exercice, utiliser obligatoirement les résultats des deux exercices précédents sans recopier les arbres de preuve.

Corrigé

On pose $P(X,Y) \overset{\text{déf}}{\equiv} (X \cup Y \subseteq Y \cup X)$ et $Q(X,Y) \overset{\text{déf}}{\equiv} (X \cup Y = Y \cup X)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{exercice 3}}{P(A,B)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(X=A,Y=B)} \qquad \dfrac{\text{exercice 3}}{P(B,A)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(X=B,Y=A)}}{P(A,B) \wedge P(B,A)}\,{\scriptstyle \wedge_{\mathrm{I}}} \qquad \dfrac{\text{exercice 4}}{P(A,B) \wedge P(B,A) \Rightarrow Q(A,B)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{E}}(X=A\cup B,Y=B\cup A)}}{(A \cup B) = (B \cup A)}\,{\scriptstyle \Rightarrow_{\mathrm{E}}}}{\forall X\ \forall Y\ (X \cup Y) = (Y \cup X)}\,{\scriptstyle \forall_{\mathrm{I}}}$$

Exercice 6 (3 pts)

Soit R une relation sur A. Donner une formule logique exprimant que R est une relation d'équivalence.

Corrigé

$$(\forall x \in A \ R(x,x)) \wedge$$

$$(\forall x \in A \ \forall y \in A \ R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge$$

$$(\forall x \in A \ \forall y \in A \ \forall z \in A \ R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$$

Exercice 7 (3 pts)

Demontrer que si R et S sont des relations symétriques sur A, alors $R \cup S$ est une relation symétrique sur A.

Corrigé

Pour demontrer que $R \cup S$ est une relation symétrique sur A il faut montrer

$$(\forall x \in A \ \forall y \in A \ (x,y) \in R \cup S \Rightarrow (y,x) \in R \cup S).$$

Soit $a \in A$ et $b \in A$ quelconques tel que $(a,b) \in R \cup S$; on obtient $(a,b) \in R$ ou $(a,b) \in S$. On a deux cas :
- si $(a,b) \in R$, comme R est une relation symétrique on obtient $(b,a) \in R$, et donc $(b,a) \in R \cup S$;
- si $(a,b) \in S$, comme S est une relation symétrique on obtient $(b,a) \in S$, et donc $(b,a) \in R \cup S$;

Donc dans les deux cas on obtient $(b,a) \in R \cup S$, et donc $R \cup S$ est une relation symétrique sur A.

Exercice 8 ** (4 pts)

Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une relation sur l'ensemble des entiers naturels définie par $R \overset{\text{déf}}{=} \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$.
- Donner la relation $R^{-1} \circ R$

Corrigé

$$\begin{array}{rcl} R^{-1} \circ R & = & \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, (m,p) \in R \wedge (p,n) \in R^{-1}\} \\ & = & \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, (m,p) \in R \wedge (n,p) \in R\} \\ & = & \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, m < p \in R \wedge n < p\} \\ & = & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

- Indiquer les propriétés de la relation $R^{-1} \circ R$ en mettant des croix dans le tableau suivant :

Corrigé

	oui	non
réflexive	x	
symétrique	x	
antisymétrique		x
transitive	x	
une relation d'équivalence	x	
une relation d'ordre		x