TD1 et TD2 - Analyse de la robustesse de contrôleurs (systèmes avec paramètres incertains)

SLE 3A

Nous illustrons l'étude de la robustesse de contrôleurs au travers de l'exemple du contrôleur d'orientation de robots LEGO. Le contrôleur de distance peut être analysé de la même manière.

Contrôleur d'orientation

Les équations différentielles qui décrivent la dynamique du robot sont :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (v_g + v_d)cos(\theta)/2 \quad (1)\\
\dot{y} &= (v_g + v_d)sin(\theta)/2 \quad (2)\\
\dot{\theta} &= (v_d - v_g)/l \quad (3)
\end{aligned}$$

où x et y sont les coordonnées de la position courante le robot ; θ est son orientation ; v_g et v_d sont les vitesses des roues à gauche et à droite ; l est la distance entre les deux roues.

Nous contrôlons **l'orientation** du robot par un contrôleur de type PI dont la fonction de transfert est

$$H_\theta(s) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta \quad (4)$$

où ki_θ est le coefficient de l'action proportionelle et kp_θ est le coefficient de l'action intégrale.

Comme nous utilisons la différence entre les vitesses des roues pour contrôler l'orientation θ du robot, nous avons la variable de commande $u_\theta = (v_d - v_g)$. De l'équation (3) on obtient :

$$\dot{\theta} = u_\theta / l$$

ce qui donne en Laplace $s\theta(s) = u_\theta(s)/l$ (en supposant que les conditions initiales sont 0). Alors, la fonction de transfert de θ est

$$H_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}.$$

Le schéma de commande est comme suit. La sortie u_θ du contrôleur $H_\theta(s)$ est connectée à l' entrée du bloc $H_\theta(s)$ correspondant à la dynamique de l'orientation du robot. L'entrée du contrôleur $C_\theta(s)$ est la différence entre le retour de la sortie θ de $H_\theta(s)$ et l'orientation désirée θ^*. L'évolution de θ contrôlée par la commande u_θ peut donc être representé par un système en boucle fermée dont la fonction de transfert est :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{C_\theta(s) H_\theta(s)}{1 + C_\theta(s) H_\theta(s)} \\ &= \frac{\frac{kp_\theta}{l} s + \frac{ki_\theta}{l}}{s^2 + \frac{kp_\theta}{l} s + \frac{ki_\theta}{l}} \end{aligned}$$

Discrétisation du contrôleur

Pour implanter le contrôleur en temps-continu ci-dessus, il faut le discrétiser. Si on choisit une eériode d'échantillonnage T et une approximation de Tustin :

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

où T est la période d'échantillonnage, on obtient la fonction de transfert en temps discret $H(z)$.

Système avec des paramètres incertains

Nous allons étudier la robustesse du contrôleur d'orientation vis-à-vis aux paramètres tels que T, ki_θ, kp_θ, l. Afin d'utiliser les critères pour les systèmes en temps continu, nous utilisons la transformation suivante qui ramène le cercle unitaire en z vers le demi-plan gauche en η

$$z = \frac{1+\eta}{1-\eta}$$

La fonction caractéristique en η est :

$$\pi(\eta) = \frac{4}{T^2}\eta^2 + 2\frac{kp_\theta}{lT}\eta + \frac{ki_\theta}{l}$$

Nous pouvons maintenant traiter la variable η comme la variable s dans les fonctions de transfert en Laplace.

1 Questions 1

En utilisant les fonctions matlab dans le fichier **hurwitz.m** donné, calculer la matrice de Hurwitz pour déterminer la stabilité du contrôleur pour des différentes valeurs de la période d'échantillonnage T et des coefficients kp_θ et ki_θ du PI.

Pour utiliser la fonction *hurwitz*, on définit en Matlab le polynôme caractéristique (par exemple de degré n) $\pi(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$:

```
p = [ a_n ... a_0 ]
```

Puis, la matrice H de Hurwitz de p peut être calculée comme suit (le deuxième argument de la fonction *hurwitz* est le de degré n du polynôme :

```
H = hurwitz(p,n)
```

2 Questions 2

Le but de cet exercise est d'utiliser le **critère Bialas** pour trouver des conditions sur les paramètres afin d'assurer la stabilité robuste du système. Pour utiliser ce critère, nous devons d'abord mettre le polynôme p sous la forme requise :

$$\pi(\eta) = \pi_0(\eta) + q\pi_1(\eta) \tag{5}$$

où $\pi_0(\eta)$ est stable et de degré plus grand que $\pi_1(\eta)$.

Pour ceci, notons que l'on peut écrire le polynôme π comme suit :

$$\pi(\eta) = (\frac{2}{T}\eta + 1)^2 + A(\eta + B)$$

où

$$(-\frac{4}{T} + 2\frac{kp_\theta}{lT}) = A$$

$$\frac{\frac{ki_\theta}{l} - 1}{A} = B$$

Alors,

$$\pi_0(\eta) = (\frac{2}{T}\eta + 1)^2$$

$$\pi_1(\eta) = (\eta + B)$$

et A est traité comme le paramètre q dans la forme (5). On peut maintenant utiliser le **critère Bialas**, puisque $T > 0$ et le polynôme π_0 est donc toujours stable, et en plus il est de degré plus grand que π_1.

Nous allons fixer B avec une valeur constante qui correspond au mode nominal, par exemple :

```
l_nominal=0.2;  %axe inter-roue

%Parametres du controleur d'orientation
alpha_nominal=1/l_nominal;
omega_nominal=1.25;
ksi_nominal=1;
ki_teta_nominal=omega_nominal*omega_nominal/alpha_nominal
```

```
kp_teta_nominal=3*ksi_nominal*omega_nominal/alpha_nominal

%periode d'echantillonage
T_nominal = 0.001;
```

A partir de ces valeurs on calcule la valeur correspondante de B et les paramètres ki_θ, kp_θ, T peuvent varier mais doivent satisfaire la contrainte suivante :

$$B = \frac{\frac{ki_\theta}{l} - 1}{(-\frac{4}{T} + 2\frac{kp_\theta}{lT})}. \tag{6}$$

- (a) En considérant A comme paramètre q dans le **critère Bialas**, trouver la valeur q_{min} pour la stabilité robuste.
- (b) Varier maintenant les valeurs de ki_θ et T autour de leurs valeurs nominales. Notons que kp_θ ne peut pas être choisi librement, mais il doit satisfaire la contrainte (6). Trouver kp_θ à partir de la contrainte (6) et vérifier ensuite si la valeur correspondante de q respecte le seuil inférieur q_{min} de la question (a).
- (c) Augmenter maintenant la valeur nominale de T et refaire l'expérience. Observer une réduction de la marge de robustesse et expliquer.

3 Questions 3

Appliquer le théorème Kharitonov pour étudier la stabilité par rapport à la distance $l \in [0.19, 0.21]$ (les autres paramètres du contrôleur sont maintenant fixes, par exemple avec les valeurs de la Question 2). Pour vérifier la stabilité des polynômes de Kharitonov, utiliser le programme matlab **hurwitz.m**.

4 Questions 4

Le délai τ du moteur peut être introduit dans la fonction de transfert :

$$H_\theta(s) = \frac{e^{-\tau s}}{ls}$$

Avec le contrôleur PI

$$C_\theta(s) = \frac{ki_\theta}{s} + kp_\theta.$$

- Calculer le polynôme caractéristique de la boucle fermée
- Etudier sa stabilité par rapport au délai τ