Vendredi 21 janvier 2005 Sujet : 1fle R-V+1fle R
UFR IMA, M1 Mathématique Informatique
Option SLE

Epreuve de :

Automatique et Traitement du Signal

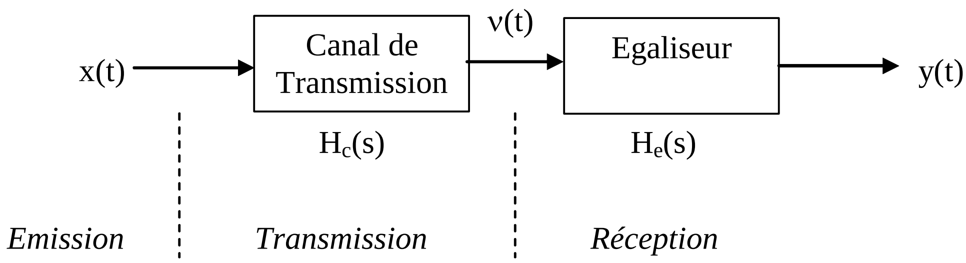
Cours, Documents et Calculatrice autorisés

Il est conseillé de débuter par la partie I dans laquelle la notion d' « Egaliseur » est expliquée. Cette même notion sera reprise dans la partie II, mais dans le contexte de transmission numérique.

I. Modélisation d'une Chaîne de Transmission Analogique (Partie 1)

On considère une modélisation simple d'une chaîne de transmission entre un émetteur et un récepteur :

Le canal de transmission apporte une distorsion et peut être modélisé par un système linéaire de fonction de transfert $\mathcal{L}h_c(s)=H_c(s)$. Pour compenser la distorsion apportée par le canal, un module « Egaliseur » est inséré à la réception tel que :



Pour une compensation parfaite, la fonction de transfert de l'égaliseur est telle que : $\forall$ s$\in$ $\mathbb{C}$, $H_c(s).\ H_e(s)=1$.

1.1°) Le canal de transmission a pu être modélisé par sa fonction de transfert dans le plan de Laplace : $H_c(s)=\dfrac{s+1}{s+2}$. Dans le plan de Fourier, donner l'expression de $H_c(\omega)$ et de $H_e(\omega)$ pour une compensation parfaite. Calculer $|H_c(\omega=0)|$ et $|H_c(\omega\rightarrow+\infty)|$, avec ω la pulsation. Même question pour l'égaliseur. En déduire l'allure de $|H_c(\omega)|$ et de $|H_e(\omega)|$. Faire une représentation graphique. Expliquer.

I.2°) Au cours du temps, le canal de transmission a subi des modifications et l'égaliseur n'a pas été réajusté ; il reste dans la configuration du I.1°). Le comportement du canal est maintenant modélisé par une nouvelle fonction de transfert : $H'_c(s)=\dfrac{s+1}{s+2+\varepsilon}$.

On applique à l'entrée x(t) = u(t) , la fonction « Echelon à 1 ». Calculer $y(t=0^+)$ et $y(t\rightarrow+\infty)$. Expliquer votre démarche.

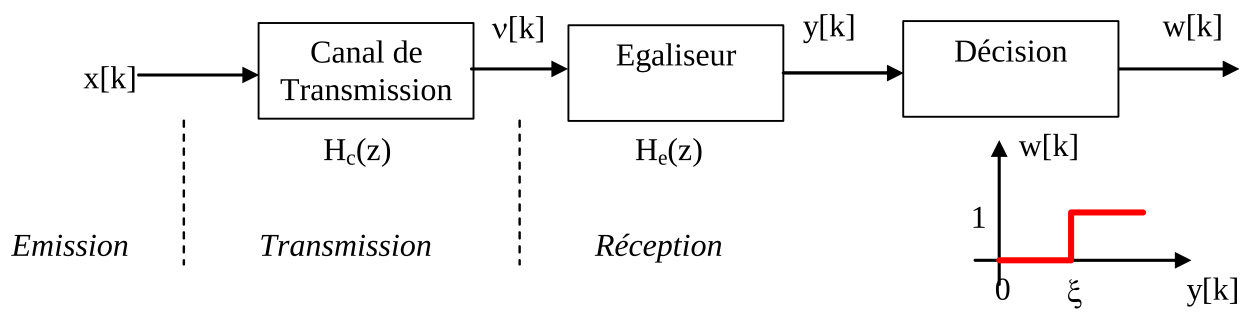
I.3°) Toujours pour x(t)=u(t), on peut montrer que y(t) peut se mettre sous la forme suivante :
$y(t)= y(t\rightarrow+\infty).u(t)+(y(t=0^+)- y(t\rightarrow+\infty)).\exp(-\alpha t).u(t)$, avec $\alpha \geq 0$, une constante dépendant des paramètres (pôles et zéros) modélisant le canal et l'égaliseur.

Quantifier l'erreur relative maximale $Err_{max} = Max\{|y(t)-x(t)|/x(t)\}$, pour $t > 0$, pour estimer la qualité de la transmission. On s'aidera avantageusement d'un graphique représentant y(t) et x(t). On souhaite maintenir cette erreur maximale inférieure à 0,1. En déduire les bornes inférieure et supérieure pour l'erreur ε tolérable sur l'estimation de la fonction de transfert du canal.

I.4°) On considère maintenant un autre canal de transmission qui se modélise par $H_C(s) = \frac{s-1}{s+2}$. Décrire l'égaliseur parfait à mettre en place. Que pouvez vous en conclure ?

II. Modélisation d'une Chaîne de Transmission Numérique

On considère maintenant un modèle de transmission de message numérique (binaire) :



x[k] est le kième échantillon de la suite binaire à transmettre, $x[k] \in \{0,1\}$. ν[k] et y[k] sont le kième échantillon de respectivement la suite en sortie du canal et en sortie de l'égaliseur, $\nu[k] \in \mathcal{Z}$ et $y[k] \in \mathcal{Z}$. L'étape de décision est telle que :
$y[k] \geq \xi$, alors w[k]=1 ;
$y[k] < \xi$, alors w[k]=0. On prendra pour la suite du problème ξ=0,5.

II.1°) Le canal de transmission est modélisé par un système causal ainsi :
$H_C(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha.z^{-1}}$, avec $\alpha \in \Re$ et $|\alpha|<1$.
Quelle est la région de convergence de $H_c(z)$? Qu'en déduisez vous sur sa stabilité ? Donner l'équation aux différences permettant de calculer les échantillons de la suite ν[k] en fonction des échantillons de la suite x[k].

II.2°) L'égaliseur compense parfaitement le canal. Quelle est sa transformée en z. Quelle est la région de convergence de $H_e(z)$? Qu'en déduisez vous sur sa stabilité ? Donner l'équation aux différences permettant de calculer les échantillons de la suite y[k] en fonction des échantillons de la suite ν[k].

II.3°) Quelle vérification simple pouvez vous faire pour les 2 équations aux différences trouvées précédemment? Appliquer et ainsi vérifier que vos deux équations peuvent être correctes.

II.4°) Le comportement du canal a évolué. Il se modélise par : $H_c(z) = \dfrac{1-\alpha}{1-(\alpha+\varepsilon).z^{-1}}$. L'égaliseur reste tel qu'il a été ajusté en II.2°). Donner l'équation aux différences permettant de calculer directement y[k] si le message d'entrée est x[k].

Calculer pour les 4 premiers échantillons (k=0..3) y[k] et e[k]=y[k]-x[k], si la séquence à transmettre est la suivante :

$x[k]=0$, pour $k<0$
$x[k]=(1+(-1)^k)/2$, pour $k \geq 0$.

Remplir un tableau regroupant les expressions littérales et les applications numériques pour $\alpha=0,2$ et $\varepsilon=0,1$:

échantillon | k	0	1	2	3
x[k]	1	0	1	0
y[k] : expression littérale fonction de α et de ε				
y[k] : application numérique				
e[k] : expression littérale fonction de α et de ε				
e[k] : application numérique				

II.5°) On observe en réalité, une erreur à l'échantillon k=3. Que peut-on en déduire de ε ? Qu'en sera-t-il alors des échantillons suivants ?

II.6°) On fait de nouveau l'hypothèse que le canal a comme modèle : $H_c(z) = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha.z^{-1}}$. On cherche à estimer α, valeur différente mais proche de 0,2. L'égaliseur est ajusté à $H_e(z) = \dfrac{1-0,2.z^{-1}}{1-0,2} = \dfrac{1-0,2.z^{-1}}{0,8}$. Montrer que l'on peut estimer α par la connaissance des suites y[k] et w[k] sur 2 échantillons consécutifs en supposant une transmission sans erreur sur ce laps de temps. Expliquer la démarche.

<u>III. Modélisation d'une Chaîne de Transmission Analogique (Partie 2)</u>

III.1°) Dans un cas très général, soit une fonction de transfert dans le domaine de Laplace, $F(s)=1/(s-s_0)$, avec s_0 un pôle tel que $s_0=\sigma_0+j\omega_0$. Soit $F'(s)=s-s_0'$, avec $s_0'=-s_0^*$ (* opérateur « conjugué »). Tracer dans le plan de Laplace, les pôles et les zéros de F(s) et F'(s). On prendra $\sigma_0 < 0$ et $\omega_0 > 0$. Quelles remarques pouvez vous faire ? Montrer que, dans le plan de Fourier, $|F(\omega).F'(\omega)|=1$, pour $\omega \in \Re - \{\omega_0\}$.

III.2°) Appliquer la propriété démontrée au III.1°) pour proposer un égaliseur du canal $H_c(s) = \dfrac{s-1}{s+2}$. Cet égaliseur sera-t-il parfait ? Expliquer le type de compensation effectué.