

---

# Représentation des Signaux en Fréquence

## Transformées de Fourier

# Représentation en Fréquence :

## 4 modèles

---

- Signaux continus périodiques
  - Série de Fourier (SF)
- Signaux continus non périodiques
  - Transformée de Fourier (TF)
- Signaux discrets non périodiques
  - Transformée de Fourier des signaux discrets (TFSD)
- Signaux discrets périodiques
  - Transformée de Fourier discrète (TFD)

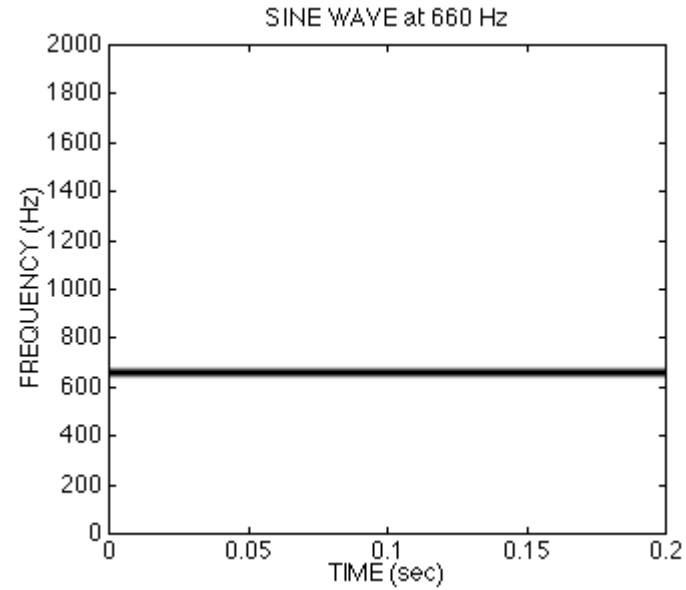
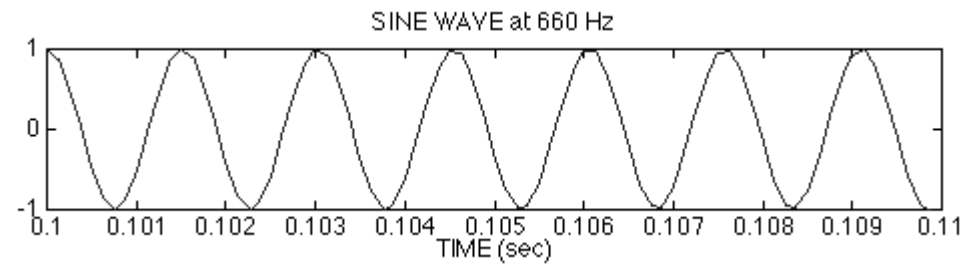
# Justification

---

- Représentation temporelle
  - Évolution temporelle des signaux
- Représentation de Fourier
  - Composition fréquentielle des signaux
- Cas particulier de la Transformée de Laplace
  - Signaux permanents à énergie finie
- Point de départ : Série de Fourier (1807)
  - Tous les signaux périodiques peuvent se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux

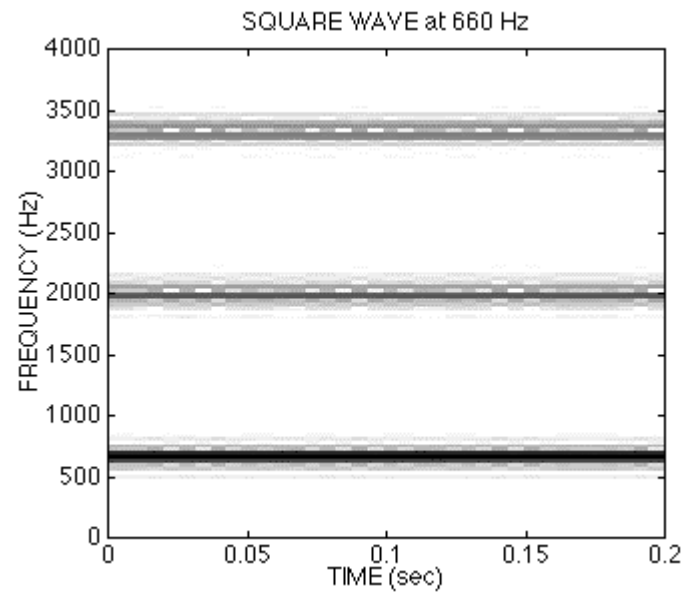
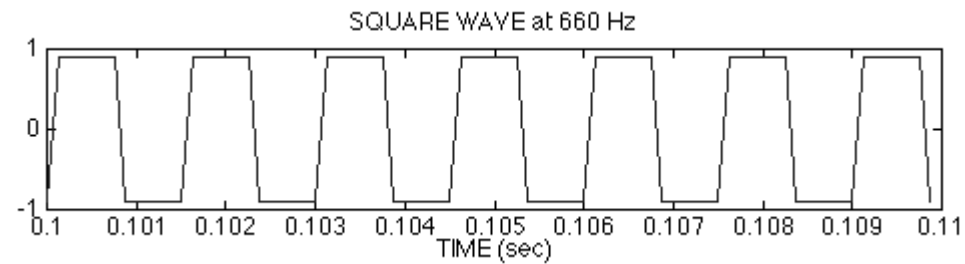
# Cas d'une sinusoïde

---



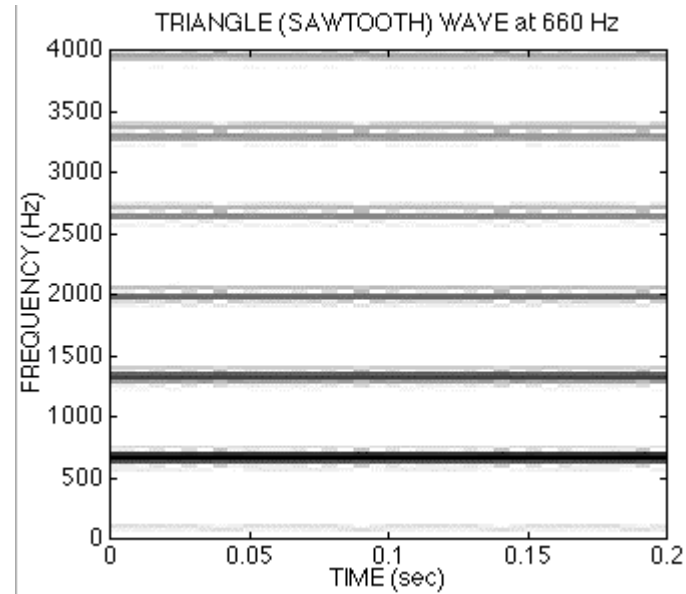
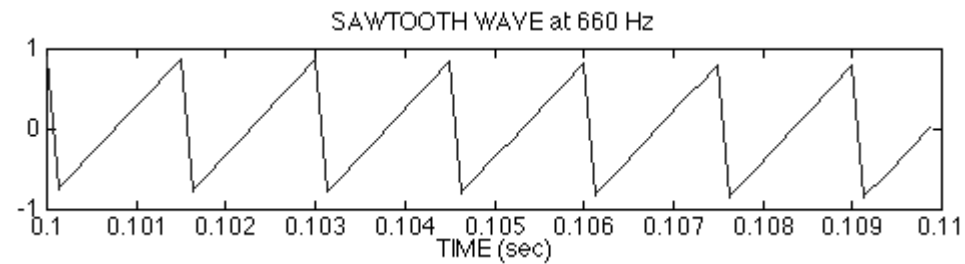
# Cas de signaux en créneaux

---



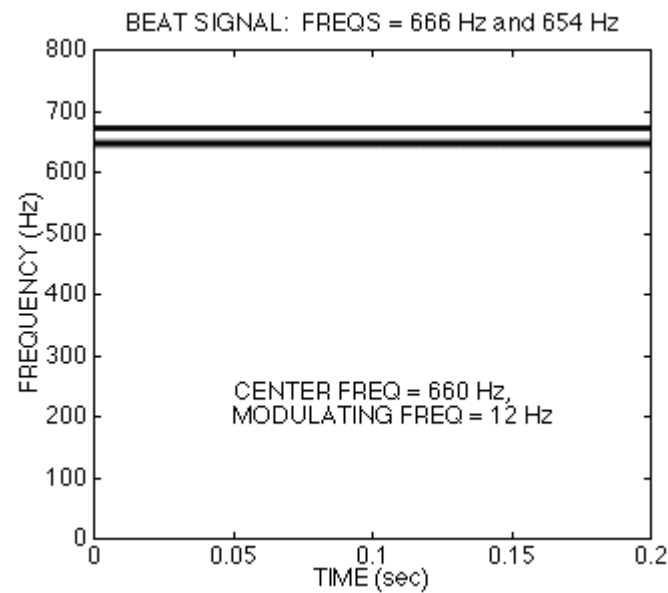
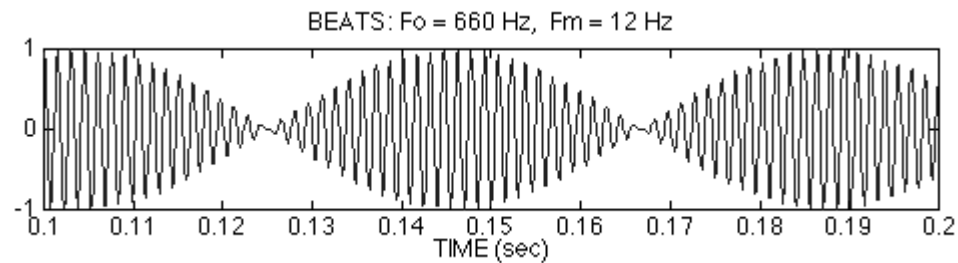
# Cas de signaux en dent de scie

---



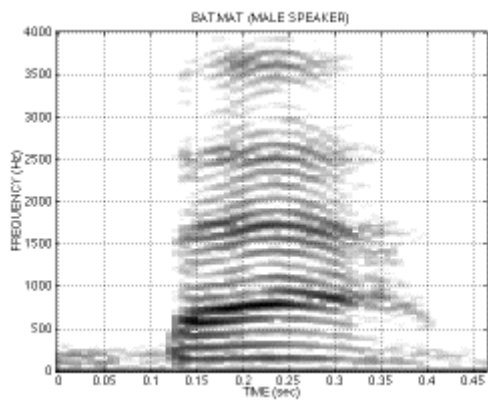
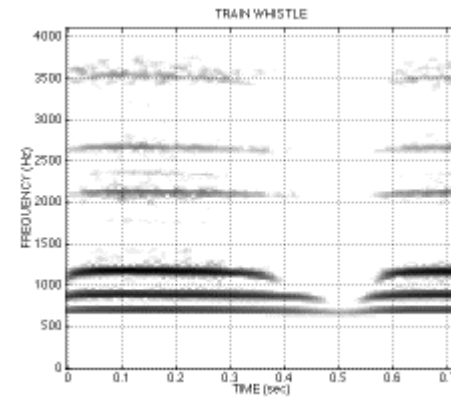
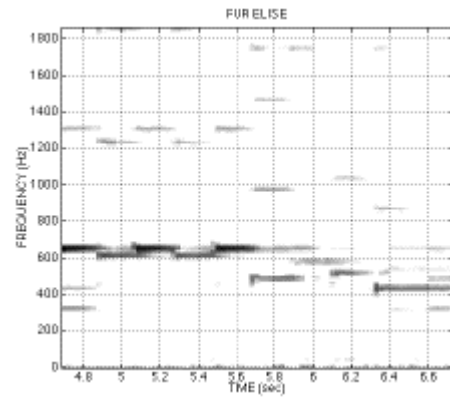
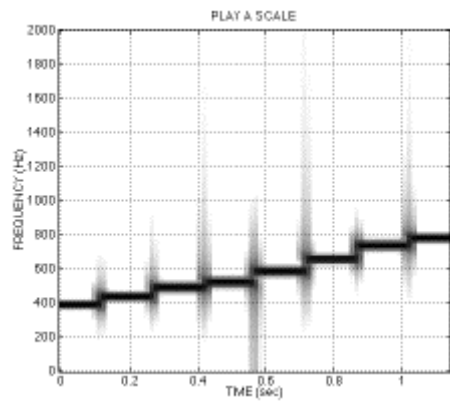
# Cas de signaux de battements

---

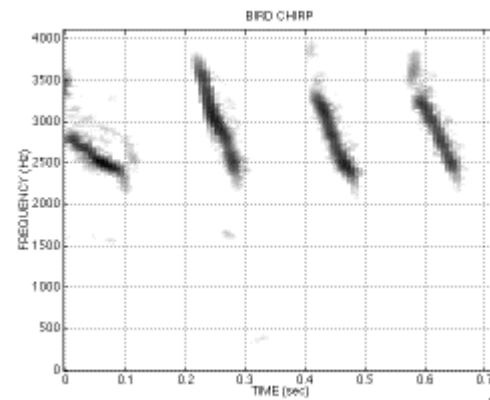
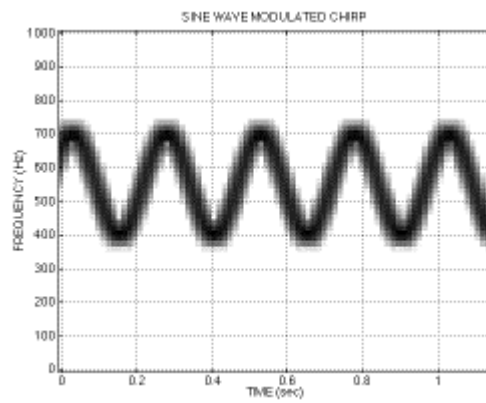
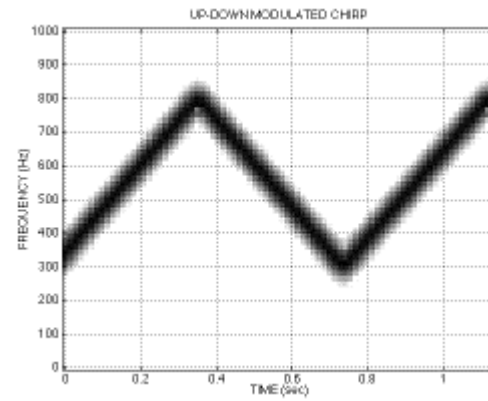
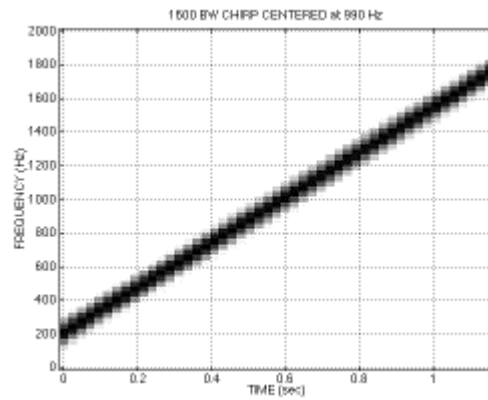


# Autres exemples

---



# Chirps



# Justification

---

- Série de Fourier (1807)
  - Tous les signaux périodiques peuvent se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

,  $x(t)$  périodique de période  $T_0$

- Formulation complexe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \cdot \exp(jn\omega_0 t)$$

# Représentation des signaux périodiques (1/2)

---

- Cas trivial :  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$

$$x(t) = A \cos(\phi) \sin(\omega_0 t) + A \sin(\phi) \cos(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow a_0 = 0, a_1 = A \sin(\phi), b_1 = A \cos(\phi)$$

- Formulation complexe

$$x(t) = j \cdot (A/2) \cdot (e^{-j\theta} - e^{j\theta}); \quad \theta = \omega_0 t + \phi$$

$$x(t) = j \cdot (A/2) (e^{-i\phi} \cdot e^{-i\omega_0 t} - e^{i\phi} \cdot e^{i\omega_0 t})$$

$$\rightarrow X[1] = -j \cdot (A/2) \cdot e^{i\phi}; \quad X[-1] = j \cdot (A/2) \cdot e^{-i\phi}$$

$$\text{En module : } |X[1]| = |A/2|; \quad |X[-1]| = |A/2|$$

# Représentation des signaux périodiques (2/2)

---

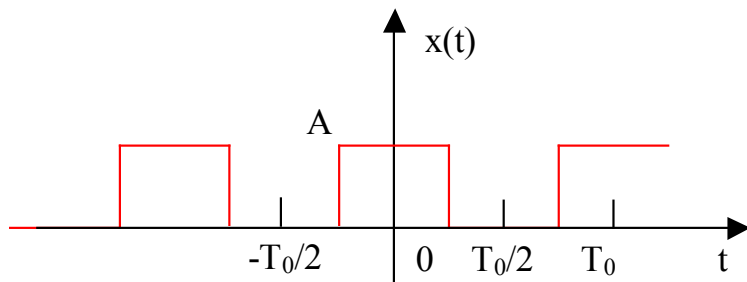
- Cas quelconque :  $x(t)$  périodique de période  $T_0$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \cdot \exp(jn\omega_0 t)$$

$$X[n] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

# Exemples (1/2)

Signal Carré



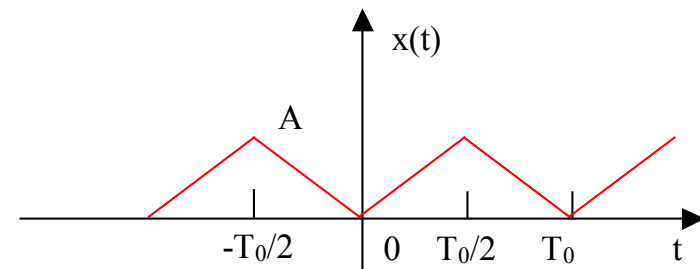
$$X[n] = \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \rightarrow X[2p] = 0$$

$$\rightarrow X[2p+1] = \frac{A \cdot (-1)^p}{\pi(2p+1)}$$

$$X[0] = A/2$$

$X[n]$  réel : Signal pair

Signal Triangle



$$X[n] = \frac{A}{(\pi n)^2} (\cos(n\pi) - 1)$$

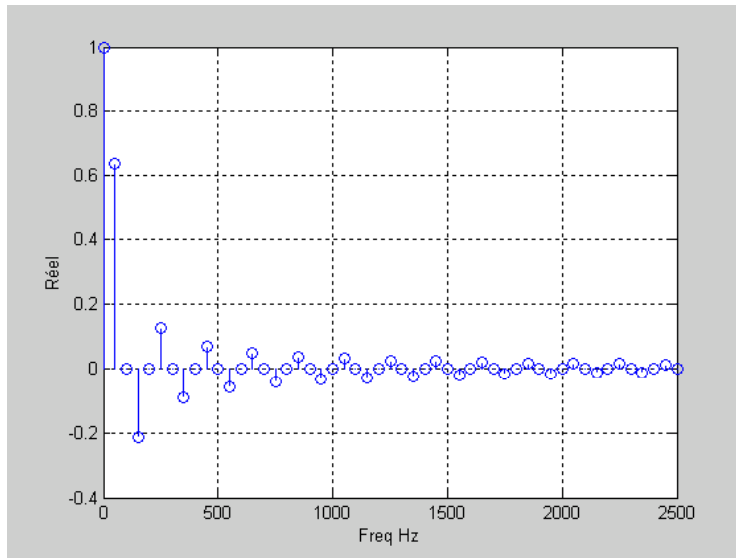
$$\rightarrow X[2p] = 0$$

$$\rightarrow X[2p+1] = \frac{-2A}{(\pi(2p+1))^2}$$

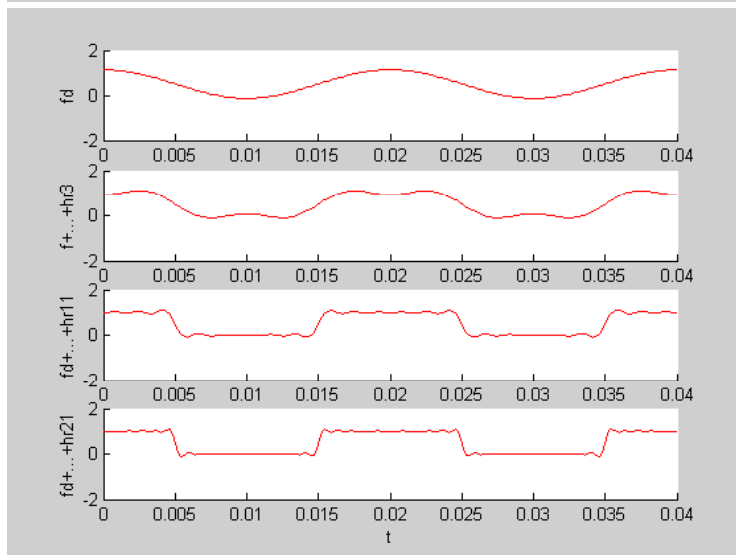
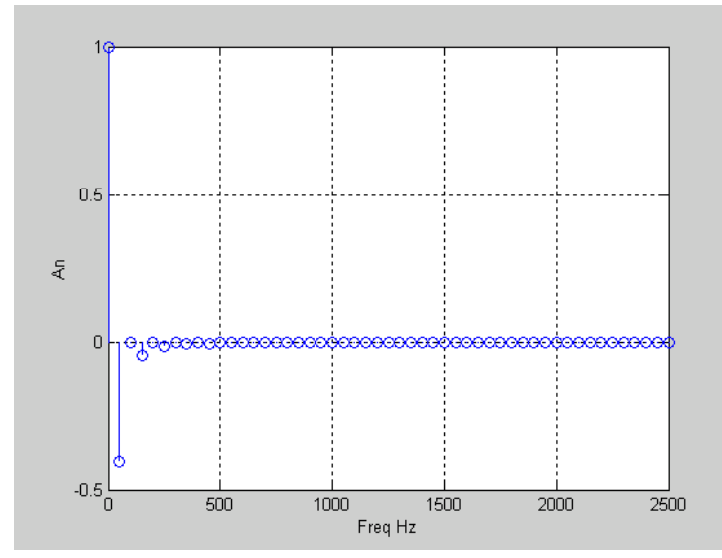
$$X[0] = A/2$$

$X[n]$  réel : Signal pair 13

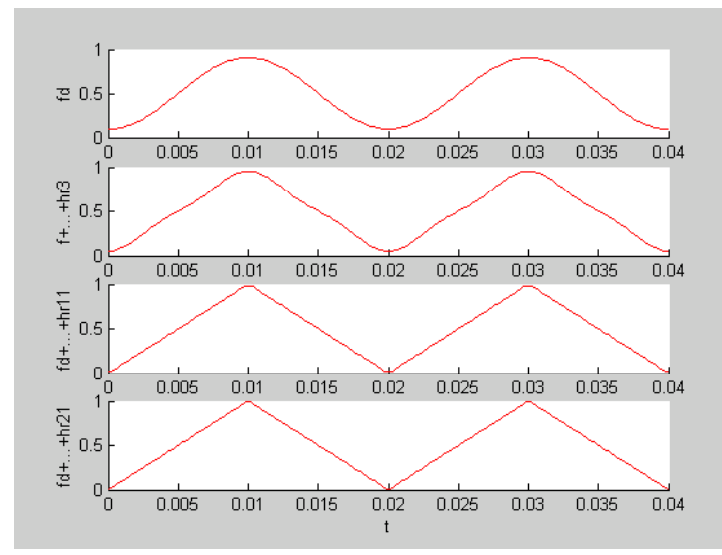
# Exemples (2/2)



$X[n]$



Recons-  
truction



# Spectre de raies

---

- Dans le domaine fréquentiel, un signal périodique est représenté par un spectre de raies
  - Connaissance de la suite des  $X[n]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X[n]| = 0 \quad \text{Convergence}$$

$|X[n]|$  : module du spectre

$\text{Real}\{X[n]\}$  : Partie réelle du spectre

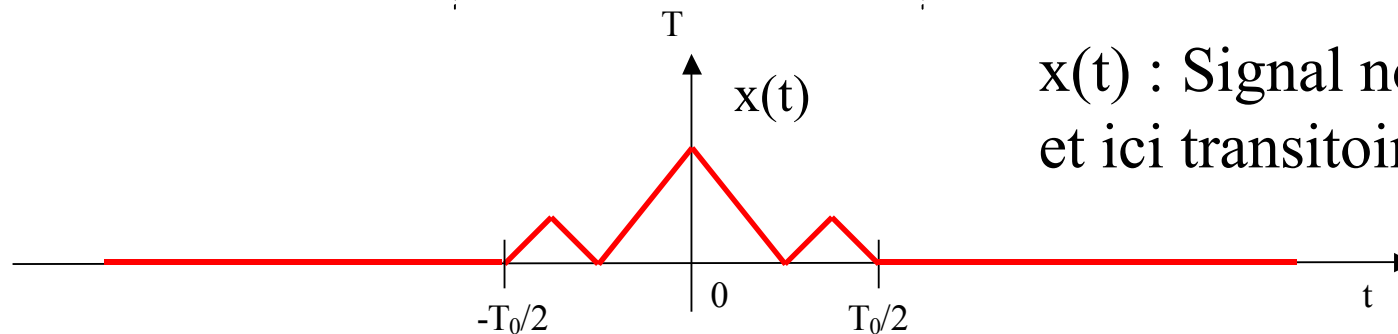
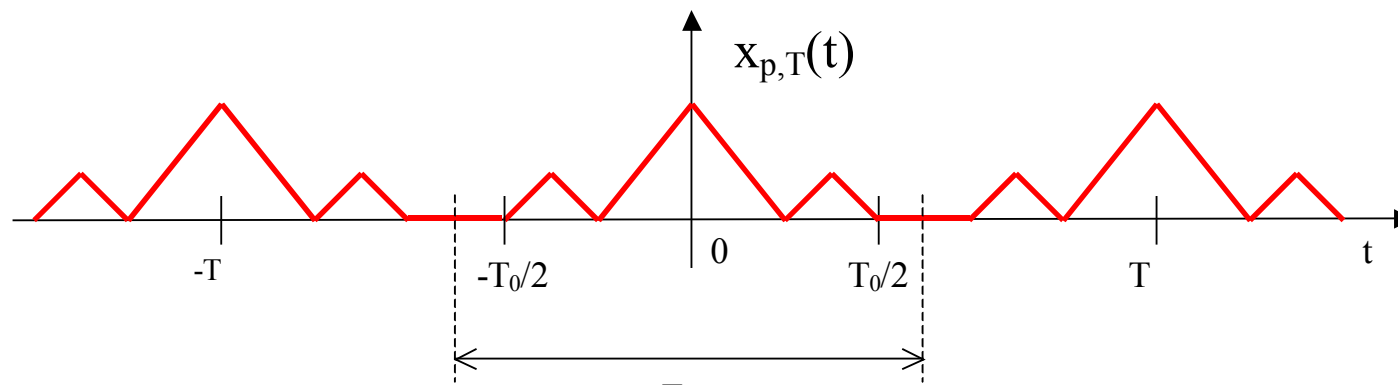
$\text{Imag}\{X[n]\}$  : Partie imaginaire du spectre

# Signaux continus non périodiques

- Extension

- Que se passe t'il quand  $T$  tend vers l'infini ?

- Spectre de raies  $\rightarrow$  spectre continu



$x(t)$  : Signal non périodique  
et ici transitoire

# Transformée de Fourier

---

C'est la Transformée de Fourier inverse :  $x(t) = \text{TF}^{-1} \{X(f)\}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(2\pi j f t) df$$

C'est la Transformée de Fourier :  $X(f) = \text{TF} \{x(t)\}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2\pi j f t) dt$$

$X(f)$  existe si l'intégrale converge (conditions d'existence)

# Extension

---

- Que se passe-t-il pour  $x(t) = \delta(t)$  ?
- Que se passe-t-il pour  $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$  ou  $\cos(\cdot)$  ?
- Les 2 réponses sont liées :
  - Calcul de TF  $\{\delta(t)\} = 1$
  - Calcul de  $TF^{-1}\{\delta(f-f_0)\} = \exp(2\pi j f_0 t) = \exp(j\omega_0 t)$
- Pour que TF et  $TF^{-1}$  correspondent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi j f t) df = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi j f t) dt = \delta(f)$$

# Exemples

Signal $x(t)$	TF : $X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$exp(-2\pi jft_0)$
$exp(-t/\tau).\gamma(t)$	$\tau/(1+2\pi jf\tau)$
<i>porte <math>p(t)</math> :durée <math>-T/2, +T/2</math>; amplitude 1</i>	$\sin(\pi fT)/(\pi f)=T \text{sinc}(\pi fT)$ [sinc(x)=sin(x)/x]
$A.\sin(2\pi f_0t)$	$\frac{Aj}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$
$A.\cos(2\pi f_0t)$	$\frac{A}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$

# Propriétés (1/3)

---

- Linéarité
- Symétries
  - $x(t)$  réel,  $\text{Real}\{X(f)\}$  paire,  $\text{Imag}\{X(f)\}$  impaire,  $|X(f)|$  pair
  - $x(t)$  réel pair,  $\text{Imag}\{X(f)\}$  nulle
  - $x(t)$  réel impair,  $\text{Real}\{X(f)\}$  nulle

# Propriétés (2/3)

---

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

- Translation temporelle

$$x(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-2\pi j a f) X(f)$$

- Translation fréquentielle

$$x(t) \exp(-2\pi j f_p t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f - f_p)$$

- Dérivation

$$\frac{d_n x(t)}{dt_n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi j f)^n X(f)$$

- Théorème de Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

# Propriétés (3/3)

---

- Théorème de la convolution  
$$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$$
$$y(t) \xleftrightarrow{\quad} Y(f)$$
$$z(t) = x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} Z(f) = X(f) \times Y(f)$$
$$z(t) = x(t) \times y(t) \xleftrightarrow{TF} Z(f) = X(f) * Y(f)$$
- Lien avec la transformée de Laplace pour les signaux causaux

$$X(f) = Fx(f) = Lx(s = 0 + 2\pi jf)$$