Caractérisations des signaux et systèmes

- Point de vue dénotationnel

- Point de vue structurel

- Point de vue comportemental

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$x : T \longrightarrow D_x$$

où :

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$x : T \longrightarrow D_x$$

où :

– T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$x : T \longrightarrow D_x$$

où :

- T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)
- D_x est le type du signal, R, N, $Bool$

Point de vue dénotationnel

Un signal est une application du temps dans un domaine :

$$x : T \longrightarrow D_x$$

où :
- T est soit le temps continu R soit le temps logique N (Z ?)
- D_x est le type du signal, R, N, $Bool$

Un système est un transformateur de signaux :

Par exemple

$$S : (T \rightarrow D_x) \rightarrow (T \rightarrow D_y)$$

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, . . .) :

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, ...) :

différentiel	récurrent, automate, programme objet
$X(0)$	$X(0)$
$X' = F(X,U)$	$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$
$Y = G(X,U)$	$Y_n = G(X_n, U_n)$

Ordre du système : dimension du vecteur X

remarque : pas intrinsèque

Point de vue structurel

Système de premier ordre (deuxième ordre, ...) :

différentiel	récurrent, automate, programme objet
$X(0)$	$X(0)$
$X' = F(X,U)$	$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$
$Y = G(X,U)$	$Y_n = G(X_n, U_n)$

Ordre du système : dimension du vecteur X

remarque : pas intrinsèque

Système d'état fini :

Automate, machine d'état fini

Point de vue comportemental

Point de vue comportemental

Système linéaire :

Point de vue comportemental

Système linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prète à la linéarité

Quid de l'initialisation ?

Point de vue comportemental

Système linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prète à la linéarité

Quid de l'initialisation ?

Système stationnaire :

Point de vue comportemental

Système linéaire :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

remarques :

Ne concerne que les signaux dont le domaine se prète à la linéarité

Quid de l'initialisation ?

Système stationnaire :

Qui commute avec un retard :

$$S(x(t-\delta)) = (Sx)(t-\delta)$$

Les systèmes linéaires stationnaires forment une classe importante historiquement et pratiquement.

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$
$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$
$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

– Stationnaires : parce que l'opérateur retard est un produit qui commute :

Systèmes rationnels

Représentables en transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}y(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Ces systèmes sont linéaires, stationnaires :

– Linéaires : à cause de la linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \mathcal{L}S(s)(\alpha\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}x_2(s))$$
$$\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) = \alpha\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_1(s) + \beta\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x_2(s)$$

– Stationnaires : parce que l'opérateur retard est un produit qui commute :

$$\mathcal{L}S(s)e^{-\delta s}\mathcal{L}x(s) = e^{-\delta s}\mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Systèmes rationnels

Forme générale : $\dfrac{N(s)}{D(s)}$ avec degré N $\leq$degré D.

$$Y(s) = \frac{\sum_0^n a_i s^i}{\sum_0^{n-1} b_i s^i + s^n} X(s)$$

$$(\sum_0^{n-1} b_i s^i + s^n) Y(s) = \sum_0^n a_i s^i X(s)$$

$$s^n Y(s) = \sum_0^n a_i s^i X(s) - \sum_0^{n-1} b_i s^i Y(s)$$

$$Y(s) = \sum_0^n a_i s^{i-n} X(s) - \sum_0^{n-1} b_i s^{i-n} Y(s)$$

$$Y(s) = a_n X(s) + \sum_0^{n-1} s^{i-n} (a_i X(s) - b_i Y(s))$$

Systèmes rationnels

$$Y(s) = a_n X(s) + \sum_{0}^{n-1} s^{i-n}(a_i X(s) - b_i Y(s))$$

Posons :

$$\begin{array}{rcl} U_0(s) & = & s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s)) \\ \ldots & & \\ U_{i+1}(s) & = & s^{-1}(a_{i+1} X(s) - b_{i+1} Y(s) + U_i(s)) \\ \ldots & & \\ Y(s) & = & a^n X(s) + U_n(s) \end{array}$$

Il est facile de vérifier algébriquement que ces deux expressions sont égales.

Systèmes rationnels

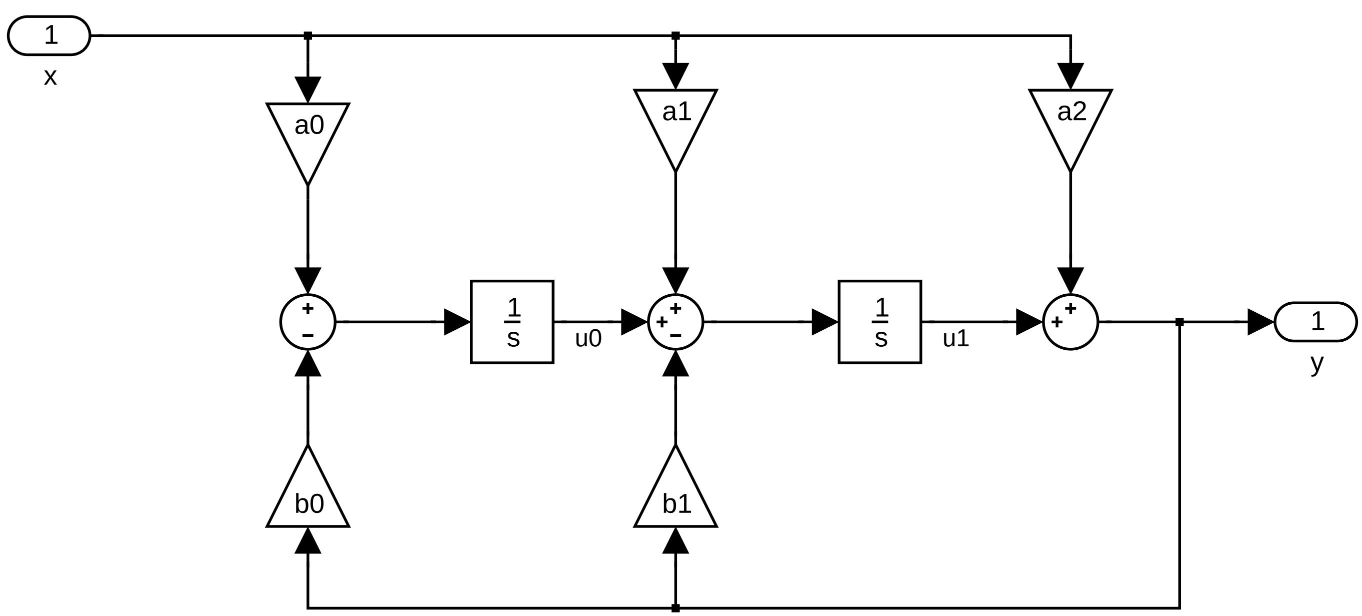
$$
\begin{aligned}
U_0(s) &= s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s)) \\
&\ldots \\
U_{i+1}(s) &= s^{-1}(a_{i+1} X(s) - b_{i+1} Y(s) + U_i(s)) \\
&\ldots \\
Y(s) &= a^n X(s) + U_n(s)
\end{aligned}
$$

Conclusion : pour simuler un système rationnel d'ordre n, il suffit d'utiliser n intégrateurs.

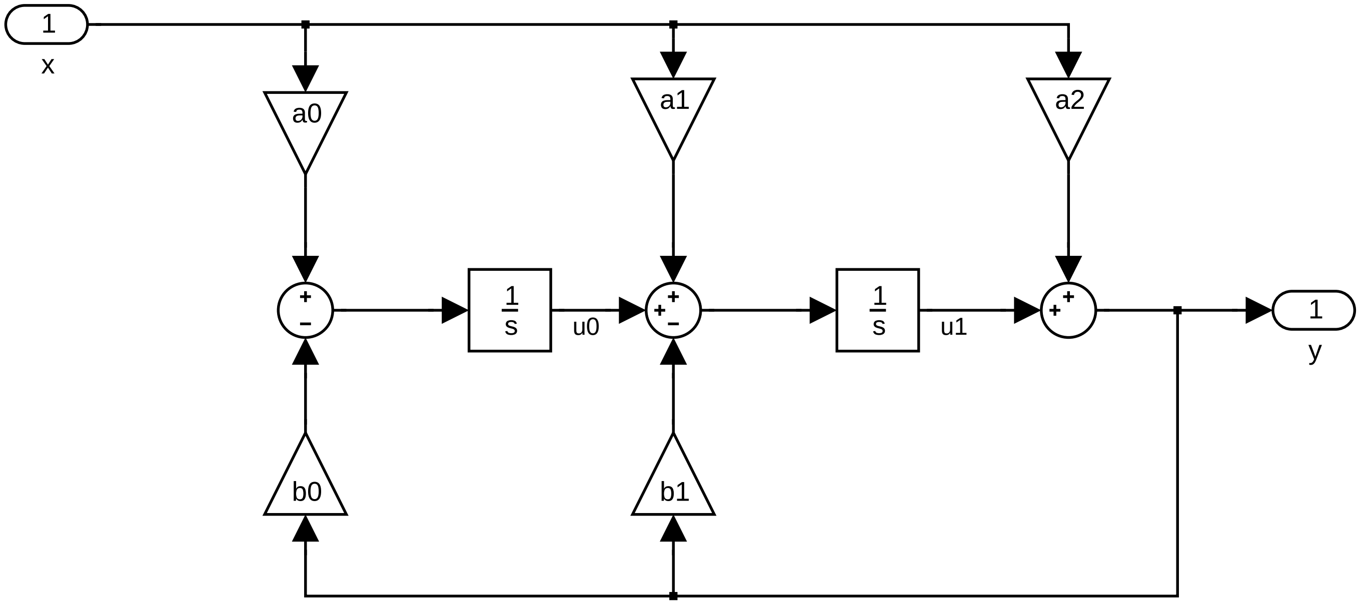
Systèmes rationnels

Exemple :

$$\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



Systèmes rationnels



$$
\begin{aligned}
U_0(s) &= s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s)) \\
U_1(s) &= s^{-1}(a_1 X(s) - b_1 Y(s) + U_0(s)) \\
Y(s) &= a_2 X(s) + U_1(s) \\
Y(s) &= a_2 X(s) + s^{-1}(a_1 X(s) - b_1 Y(s) + s^{-1}(a_0 X(s) - b_0 Y(s))) \\
Y(s) &= a_2 X(s) + s^{-1} a_1 X(s) + s^{-2} a_0 X(s) - s^{-1} b_1 Y(s) - s^{-2} b_0 Y(s) \\
s^2 Y(s) &= a_2 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_0 X(s) - b_1 s Y(s) - b_0 Y(s)
\end{aligned}
$$