Systèmes et signaux, convolution

Systèmes et signaux, convolution

Question : quelle différence entre signaux et systèmes (linéaires stationnaires) ?

Systèmes et signaux, convolution

Question : quelle différence entre signaux et systèmes (linéaires stationnaires) ?

presque aucune !

Systèmes et signaux, convolution

Question : quelle différence entre signaux et systèmes (linéaires stationnaires) ?

presque aucune !

exemple : système du premier ordre

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s)$$

Systèmes et signaux, convolution

Question : quelle différence entre signaux et systèmes (linéaires stationnaires) ?

presque aucune !

exemple : système du premier ordre

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s)$$

$$\frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Systèmes et signaux, convolution

Question : quelle différence entre signaux et systèmes (linéaires stationnaires) ?

presque aucune !

exemple : système du premier ordre

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s)$$

$$\frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s) = \mathcal{L}S(s)\mathcal{L}x(s)$$

Tous deux sont représentés par des transformées de Laplace :

Autre exemple : L'intégrale

Autre exemple : L'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x$$

D'où

$$y' = x$$

Autre exemple : L'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x$$

D'où

$$y' = x$$

$$s\mathcal{L}y = x$$

Autre exemple : L'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x$$

D'où

$$y' = x$$

$$s\mathcal{L}y = x$$

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s}\mathcal{L}x$$

Autre exemple : L'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x$$

D'où

$$y' = x$$

$$s\mathcal{L}y = x$$

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s}\mathcal{L}x$$

Autre exemple : L'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x$$

D'où

$$y' = x$$

$$s\mathcal{L}y = x$$

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s}\mathcal{L}x$$

$$\mathcal{L}\int = \frac{1}{s}$$

Autre exemple : L'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x$$

D'où

$$y' = x$$

$$s\mathcal{L}y = x$$

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s}\mathcal{L}x$$

$$\mathcal{L}\int = \frac{1}{s}$$

- Comment expliquer cela ?
- Quelle est la vision signal d'un système ?
- Y a-t-il des systèmes qui ne sont pas des signaux ?

Comment expliquer cela ?

Comment expliquer cela ?

Théorème de convolution

Comment expliquer cela ?

Théorème de convolution

Convolution de deux signaux $x,\ y$:

$$(x \ * \ y)(t) = \int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)$$

Comment expliquer cela ?

Théorème de convolution

Convolution de deux signaux $x,\ y$:

$$(x * y)(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)$$

Théorème de convolution

$$\boxed{\mathcal{L}(x * y)(s) = \mathcal{L}x(s)\mathcal{L}y(s)}$$

A « tout » signal correspond un système dont la sortie s'obtient en convolant l'entrée avec le signal.

Démonstration

Démonstration

$$\mathcal{L}(x * y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)e^{-s\tau-s(t-\tau)}d\tau dt$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)e^{-s\tau-s(t-\tau)}d\tau dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(u)e^{-s\tau-s(u)}d\tau du$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(x * y)(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(x * y)(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) e^{-s\tau - s(t-\tau)} d\tau dt$$

$$\mathcal{L}(x * y)(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x(\tau) y(u) e^{-s\tau - s(u)} d\tau du$$

$$\mathcal{L}(x * y)(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) y(u) e^{-s(u)} du$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)e^{-s\tau-s(t-\tau)}d\tau dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(u)e^{-s\tau-s(u)}d\tau du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right) y(u)e^{-s(u)}du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\mathcal{L}x(s)\right) y(u)e^{-s(u)}du$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)e^{-s\tau - s(t-\tau)}d\tau dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(u)e^{-s\tau - s(u)}d\tau du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right) y(u)e^{-s(u)}du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\mathcal{L}x(s)\right) y(u)e^{-s(u)}du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \mathcal{L}x(s) \int_0^\infty y(u)e^{-s(u)}du$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right) e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(t-\tau)e^{-s\tau-s(t-\tau)}d\tau dt$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)y(u)e^{-s\tau-s(u)}d\tau du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right) y(u)e^{-s(u)}du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_0^\infty \left(\mathcal{L}x(s)\right) y(u)e^{-s(u)}du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \mathcal{L}x(s)\int_0^\infty y(u)e^{-s(u)}du$$

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \mathcal{L}x(s)\mathcal{L}y(s)$$

Quel est le « signal » associé à un système ?

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s)$$

Quel est le « signal » associé à un système ?

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s)$$

$\frac{b}{s+a}$ est la réponse du système au signal d'entrée δ de transformée

$$\mathcal{L}\delta(s) = 1$$

Quel est le « signal » associé à un système ?

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s+a}\mathcal{L}x(s)$$

$\frac{b}{s+a}$ est la réponse du système au signal d'entrée δ de transformée

$$\mathcal{L}\delta(s) = 1$$

δ est l'impulsion de Dirac

$\frac{b}{s+a}$ est la réponse impulsionnelle du système

La sortie du système (linéaire stationnaire) s'obtient en convolant l'entrée
avec la réponse impulsionnelle du système

Y a-t-il des systèmes qui ne sont pas des signaux ?

Y a-t-il des systèmes qui ne sont pas des signaux ?

Oui

Exemple

$$\mathcal{L}x'(s) = s\mathcal{L}x(s)$$

Y a-t-il des systèmes qui ne sont pas des signaux ?

Oui

Exemple

$$\mathcal{L}x'(s) = s\mathcal{L}x(s)$$

Mais, par définition,

$$x' = \left(\frac{d}{dt}\right)x$$

d'où

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right)(s) = s$$

Y a-t-il des systèmes qui ne sont pas des signaux ?

Oui

Exemple

$$\mathcal{L}x'(s) = s\mathcal{L}x(s)$$

Mais, par définition,

$$x' = \left(\frac{d}{dt}\right) x$$

d'où

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right)(s) = s$$

mais l'opérateur dérivée ne correspond à aucun signal

L'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac δ : $\mathcal{L}\delta(s) = 1$

L'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac δ : $\mathcal{L}\delta(s) = 1$

est aussi l'opérateur « identité » : $x = \delta * x$

L'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac δ : $\mathcal{L}\delta(s) = 1$

est aussi l'opérateur « identité » : $x = \delta * x$

De même, δ est la « dérivée » de l'échelon unité :

$$u' = \delta$$

L’impulsion de Dirac

L’impulsion de Dirac δ : $\mathcal{L}\delta(s) = 1$

est aussi l’opérateur « identité » : $x = \delta * x$

De même, δ est la « dérivée » de l’échelon unité :

$$u' = \delta$$

$$1 = s\frac{1}{s}$$

L'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac δ : $\mathcal{L}\delta(s) = 1$

est aussi l'opérateur « identité » : $x = \delta * x$

De même, δ est la « dérivée » de l'échelon unité :

$$u' = \delta$$

$$1 = s\frac{1}{s}$$

De même, $\delta' = \dfrac{d}{dt}\delta$

qui correspond à $s = s.1$

Compléments

Opérateur retard : $R_d x(t) = x(t-d)$

Compléments

Opérateur retard : $R_d x(t) = x(t-d)$

Transformée de Laplace du retard :

$$\mathcal{L}(R_d x)(s) = e^{-sd}\mathcal{L}x(s)$$

Compléments

Opérateur retard : $R_d x(t) = x(t-d)$

Transformée de Laplace du retard :

$$\mathcal{L}(R_d x)(s) = e^{-sd}\mathcal{L}x(s)$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(R_d x)(s) = \int_0^{\infty} x(t-d)e^{-st} = \mathcal{L}(R_d x)(s) = \int_0^{\infty} x(t-d)e^{-s(t-d)-sd}$$

$$\mathcal{L}(R_d x)(s) = \int_{-d}^{\infty} x(u)e^{-s(u)-sd} = \mathcal{L}(R_d x)(s) = e^{-sd}\int_{-d}^{\infty} x(u)e^{-s(u)}$$

Compléments

Opérateur retard : $R_d x(t) = x(t-d)$

Transformée de Laplace du retard :

$$\mathcal{L}(R_d x)(s) = e^{-sd}\mathcal{L}x(s)$$

Démonstration

$\mathcal{L}(R_d x)(s) = \int_0^{\infty} x(t-d)e^{-st} = \mathcal{L}(R_d x)(s) = \int_0^{\infty} x(t-d)e^{-s(t-d)-sd}$

$\mathcal{L}(R_d x)(s) = \int_{-d}^{\infty} x(u)e^{-s(u)-sd} = \mathcal{L}(R_d x)(s) = e^{-sd}\int_{-d}^{\infty} x(u)e^{-s(u)}$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{L}R_d(s) = e^{-sd}}$$

Diagrammes de blocks

Représentation graphique très populaire :

Réseau de boîtes et de fils :

Diagrammes de blocks

Représentation graphique très populaire :

Réseau de boîtes et de fils :

Les boîtes sont des opérateurs (systèmes élémentaires) et des systèmes

Diagrammes de blocks

Représentation graphique très populaire :

Réseau de boîtes et de fils :

Les boîtes sont des opérateurs (systèmes élémentaires) et des systèmes

Les fils sont les signaux qui sont transformés par les boîtes.

Diagrammes de blocks

Représentation graphique très populaire :

Réseau de boîtes et de fils :

Les boîtes sont des opérateurs (systèmes élémentaires) et des systèmes

Les fils sont les signaux qui sont transformés par les boîtes.

Exemple :

$$y = \int x$$

Diagrammes de blocks

Représentation graphique très populaire :

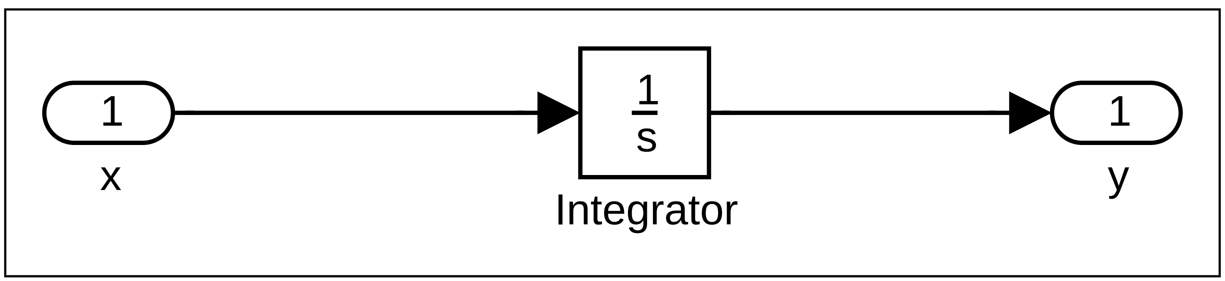
Réseau de boîtes et de fils :

Les boîtes sont des opérateurs (systèmes élémentaires) et des systèmes

Les fils sont les signaux qui sont transformés par les boîtes.

Exemple :

$$y = \int x$$



Des systèmes d'équations aux diagrammes

Un système

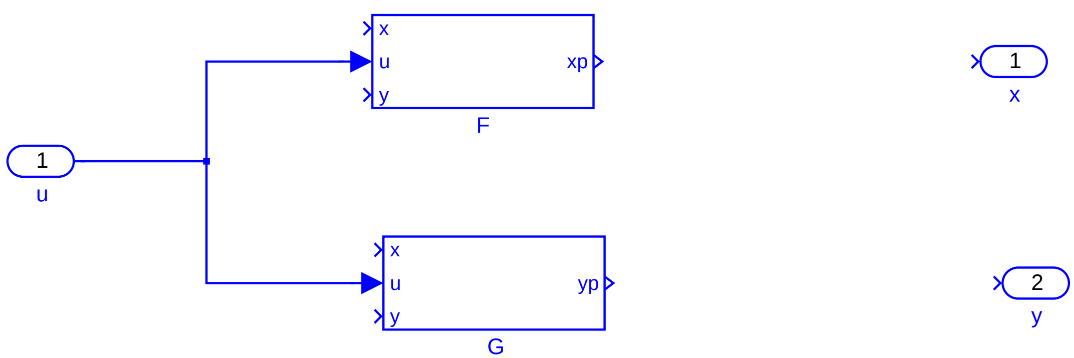
$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, u) \\ y' &= g(x, y, u) \end{aligned}$$

Des systèmes d'équations aux diagrammes

Un système

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x, y, u) \\
y' &= g(x, y, u)
\end{aligned}
$$

Construire f, g

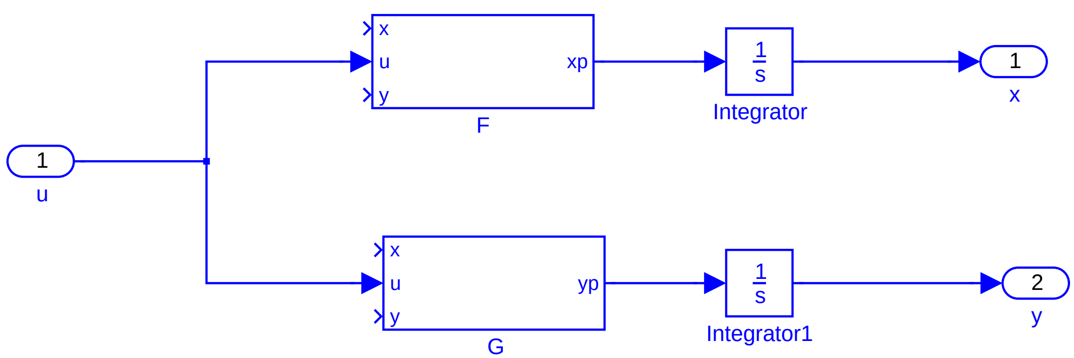


Des systèmes d'équations aux diagrammes

Un système

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x, y, u) \\
y' &= g(x, y, u)
\end{aligned}
$$

Intégrer



Des systèmes d'équations aux diagrammes

Un système

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x, y, u) \\
y' &= g(x, y, u)
\end{aligned}
$$

Reboucler