La transformée de Laplace

Pourquoi ?

La transformée de Laplace

Pourquoi ?

Outil important pour résoudre et raisonner sur les équations différentielles linéaires stationnaires,

La transformée de Laplace

Pourquoi ?

Outil important pour résoudre et raisonner sur les équations différentielles linéaires stationnaires,

Permet d'abord de comprendre des outils de conception tels que Simulink, Scicos, voire Lustre-Scade

La transformée de Laplace

Pourquoi ?

Outil important pour résoudre et raisonner sur les équations différentielles linéaires stationnaires,

Permet d'abord de comprendre des outils de conception tels que Simulink, Scicos, voire Lustre-Scade

- Définition
- Equations différentielles
- Fonctions exponentielles
- Exemples
- Théorèmes des valeurs initiales et finales

Définition

$$\mathcal{L}x(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}$$

(sous réserve d'existence)

Définition

$$\mathcal{L}x(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}$$

(sous réserve d'existence)

Pourquoi ? ? ?

Equations différentielles

Parce que cela permet de transformer des équations différentielles en équations algébriques ordinaires sur lesquelles on peut « calculer normalement »

grâce à deux propriétés :

Equations différentielles

Parce que cela permet de transformer des équations différentielles en équations algébriques ordinaires sur lesquelles on peut « calculer normalement »

grâce à deux propriétés :

1. Linéarité :

$$\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{L} x + \beta \mathcal{L} y$$

Equations différentielles

Parce que cela permet de transformer des équations différentielles en équations algébriques ordinaires sur lesquelles on peut « calculer normalement »

grâce à deux propriétés :

1. Linéarité :

$$\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{L} x + \beta \mathcal{L} y$$

2. Les dérivées sont transformées en produits :

$$\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}x(s) - x(0)$$

Démonstration

Intégration par parties :

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-st} = [x(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty x(t)(-s)e^{-st}$$

si $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$, on a bien

$$\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}x(s) - x(0)$$

Exemple

Equation différentielle de premier ordre, linéaire, à coefficients constants

$$y' = -ay + bx$$

Exemple

Equation différentielle de premier ordre, linéaire, à coefficients constants

$$y' = -ay + bx$$

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}y(s) - y(0) = -a\mathcal{L}y(s) + b\mathcal{L}x(s)$$

Exemple

Equation différentielle de premier ordre, linéaire, à coefficients constants

$$y' = -ay + bx$$

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}y(s) - y(0) = -a\mathcal{L}y(s) + b\mathcal{L}x(s)$$

$$(s + a)\mathcal{L}y(s) = b\mathcal{L}x(s) + y(0)$$

Exemple

Equation différentielle de premier ordre, linéaire, à coefficients constants

$$y' = -ay + bx$$

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}y(s) - y(0) = -a\mathcal{L}y(s) + b\mathcal{L}x(s)$$

$$(s+a)\mathcal{L}y(s) = b\mathcal{L}x(s) + y(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s+a}(b\mathcal{L}x(s) + y(0))}$$

Exemple

Equation différentielle de premier ordre, linéaire, à coefficients constants

$$y' = -ay + bx$$

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}y(s) - y(0) = -a\mathcal{L}y(s) + b\mathcal{L}x(s)$$

$$(s+a)\mathcal{L}y(s) = b\mathcal{L}x(s) + y(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s+a}\left(b\mathcal{L}x(s) + y(0)\right)}$$

L'équation différentielle a été « résolue » et la solution est une fraction rationnelle

Fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles (gamma) sont transformées en fractions rationnelles :

$$\gamma_n(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles (gamma) sont transformées en fractions rationnelles :

$$\gamma_n(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\mathcal{L}\gamma_n(s) = \left(\frac{1}{s + \lambda} \right)^{n+1}$$

Démonstration

Par induction :

Démonstration

Par induction :

$n = 0$

Démonstration

Par induction :

$n = 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-st} = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} = \left[-\frac{e^{-(s+\lambda)t}}{s+\lambda} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\lambda}$$

pourvu que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+\lambda)t} = 0$

Démonstration

Par induction :

$n = 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-st} = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} = \left[-\frac{e^{-(s+\lambda)t}}{s+\lambda} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\lambda}$$

pourvu que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+\lambda)t} = 0$

$n + 1$

Intégration par parties

Démonstration

Par induction :

$n = 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-st} = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} = \left[-\frac{e^{-(s+\lambda)t}}{s+\lambda} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\lambda}$$

pourvu que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+\lambda)t} = 0$

$n + 1$

Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t} e^{-st} &= \left[-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{-(s+\lambda)t}}{s+\lambda} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{t^n}{n!} \frac{e^{-(s+\lambda)t}}{s+\lambda} \\ &= \frac{1}{s+\lambda} \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-(s+\lambda)t} \end{aligned}$$

Exemples de signaux

Un échelon : $u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

Exemples de signaux

Un échelon : $u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

C'est le cas $n = 0, \lambda = 0$

Exemples de signaux

Un échelon : $u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

C'est le cas $n = 0, \lambda = 0$

$$\mathcal{L}u(s) = \frac{1}{s}$$

Exemples de signaux

Un échelon : $u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

C'est le cas $n = 0, \lambda = 0$

$$\mathcal{L}u(s) = \frac{1}{s}$$

Une rampe : $r(t) = u(t)t$

Exemples de signaux

Un échelon : $u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

C'est le cas $n = 0, \lambda = 0$

$$\mathcal{L}u(s) = \frac{1}{s}$$

Une rampe : $r(t) = u(t)t$

C'est le cas $n = 1, \lambda = 0$

Exemples de signaux

Un échelon : $u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

C'est le cas $n = 0, \lambda = 0$

$$\mathcal{L}u(s) = \frac{1}{s}$$

Une rampe : $r(t) = u(t)t$

C'est le cas $n = 1, \lambda = 0$

$$\mathcal{L}r(s) = \frac{1}{s^2}$$

Autres signaux

Une sinusoïde : $\sin(\omega t)$

Autres signaux

Une sinusoïde : $\sin(\omega t)$

$$sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

Autres signaux

Une sinusoïde : $\sin(\omega t)$

$$sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}sin(s) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{s + i\omega - (s - i\omega)}{(s - i\omega)(s + i\omega)} \\
&= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Exemple de systèmes

Système du premier ordre :

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s+a}\left(b\mathcal{L}x(s) + y(0)\right)$$

Réponse à un échelon en partant de $y(0) = 0$:

Exemple de systèmes

Système du premier ordre :

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s+a}(b\mathcal{L}x(s) + y(0))$$

Réponse à un échelon en partant de $y(0) = 0$:

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

Résolution

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples :

$$\frac{b}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

Résolution

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples :

$$\frac{b}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

$$\frac{bs}{s(s+a)} = \frac{As}{s} + \frac{Bs}{s+a}$$

$$\frac{b}{s+a} = A + \frac{Bs}{s+a}$$

$s = 0$

$$\frac{b}{0+a} = A$$

$$\frac{b(s+a)}{s(s+a)} = \frac{A(s+a)}{s} + \frac{B(s+a)}{s+a}$$

$$\frac{b}{s} = \frac{A(s+a)}{s} + B$$

$s = -a$

$$\frac{b}{-a} = B$$

Résolution

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples :

$$\frac{b}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

$$\frac{bs}{s(s+a)} = \frac{As}{s} + \frac{Bs}{s+a}$$

$$\frac{b}{s+a} = A + \frac{Bs}{s+a}$$

$s = 0$

$$\frac{b}{0+a} = A$$

$$\frac{b(s+a)}{s(s+a)} = \frac{A(s+a)}{s} + \frac{B(s+a)}{s+a}$$

$$\frac{b}{s} = \frac{A(s+a)}{s} + B$$

$s = -a$

$$\frac{b}{-a} = B$$

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

Autres méthodes

Problèmes : trouver les pôles (racines de polynômes)

On ne sait le faire que pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 5 (difficile au delà de 2 !)

Sinon, intégration numérique

Autres propriétés

Théorème de la valeur initiale :

$$\boxed{\lim_{t\longrightarrow 0} x(t) = \lim_{s\longrightarrow\infty} s\mathcal{L}x(s)}$$

si les limites existent.

Théorème de la valeur finale :

$$\boxed{\lim_{t\longrightarrow\infty} x(t) = \lim_{s\longrightarrow 0} s\mathcal{L}x(s)}$$

si les limites existent.

Démonstration

Théorème de la valeur initial :

$$\mathcal{L}x'(s) + x(0) = s\mathcal{L}x(s)$$

Démonstration

Théorème de la valeur initial :

$$\mathcal{L}x'(s) + x(0) = s\mathcal{L}x(s)$$

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}x'(s) = 0$$

Démonstration

Théorème de la valeur initial :

$$\mathcal{L}x'(s) + x(0) = s\mathcal{L}x(s)$$

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}x'(s) = 0$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\mathcal{L}x'(s) + x(0) = s\mathcal{L}x(s)$$

Démonstration

Théorème de la valeur initial :

$$\mathcal{L}x'(s) + x(0) = s\mathcal{L}x(s)$$

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}x'(s) = 0$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\mathcal{L}x'(s) + x(0) = s\mathcal{L}x(s)$$

$$\lim_{s \to 0} \mathcal{L}x'(s) = \int_0^{\infty} x'(t) = [x(t)]_0^{\infty} = \lim_{t \to \infty} x(t) - x(0)$$

Applications

Comment connaître la valeur finale de la réponse à un échelon d'un système de premier ordre ?

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

sans calculer la solution

Applications

Comment connaître la valeur finale de la réponse à un échelon d'un système de premier ordre ?

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

sans calculer la solution

il suffit de faire :

$$\lim_{s \to 0} s \frac{b}{s(s+a)} = \lim_{s \to 0} \frac{b}{(s+a)} = \frac{b}{a}$$

Laplace et Fourier

Quelle différence ?

Laplace et Fourier

Quelle différence ?

Pour les signaux d'énergie finie commençant au temps 0 on a :

Laplace et Fourier

Quelle différence ?

Pour les signaux d'énergie finie commençant au temps 0 on a :

$$\mathcal{F}x(f) = \mathcal{L}x(2j\pi f)$$

Laplace et Fourier

Quelle différence ?

Pour les signaux d'énergie finie commençant au temps 0 on a :

$$\mathcal{F}x(f) = \mathcal{L}x(2j\pi f)$$

Laplace est plus générale (s'adresse aussi aux signaux d'énergie infinie)

Laplace et Fourier

Quelle différence ?

Pour les signaux d'énergie finie commençant au temps 0 on a :

$$\mathcal{F}x(f) = \mathcal{L}x(2j\pi f)$$

Laplace est plus générale (s'adresse aussi aux signaux d'énergie infinie)

Fourier est une spécialisation à l´étude des phénomènes fréquentiels