Caractérisations et représentations des systèmes

Modélisation

Un modèle est une **description** d'un phénomène physique, biologique, économique, *etc*, dans un langage donné (par exemple langage mathématique).

Un modèle se définit à partir d'un ensemble de **variables** et décrit l'évolution de ces variables au cours du temps

- ***Prévision*** des valeurs des variables
- ***Explication*** de phénomènes complexes à partir des phénomènes/principes plus simples ou plus généraux

Les étapes de modélisation :

- ***Formalisation*** : définir les variables d'entrée et de sortie, mise en équation
- ***Identification*** : permet de choisir les paramètres en fonction d'un contexte donné
- ***Validation*** : vérifier si le modèle est cohérent avec la réalité observée.

Simulation : résolution des équations pour trouver les relations entre les variables d'entrée et celles de sortie. La résolution peut être analytique, numérique, *etc*.

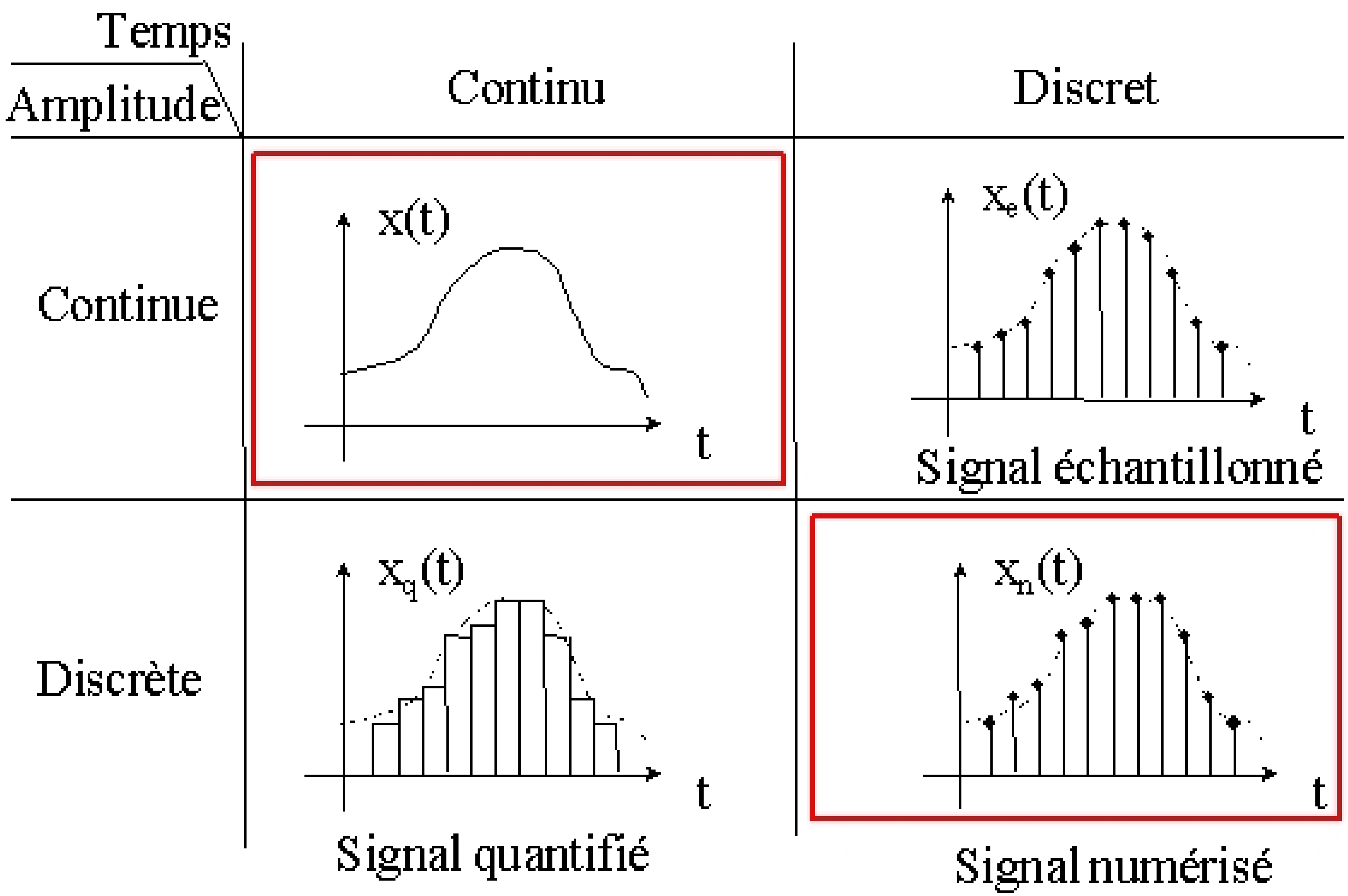
Autres utilisations du modèle : conception de contrôleurs, vérification formelle de propriétés, génération de code

Signal

Un signal est une application du temps dans un domaine $X : T \rightarrow D_X$ où :

– T est soit le temps continu R soit le temps logique N, Z

– D_X est le type du signal, R, N, $Bool$

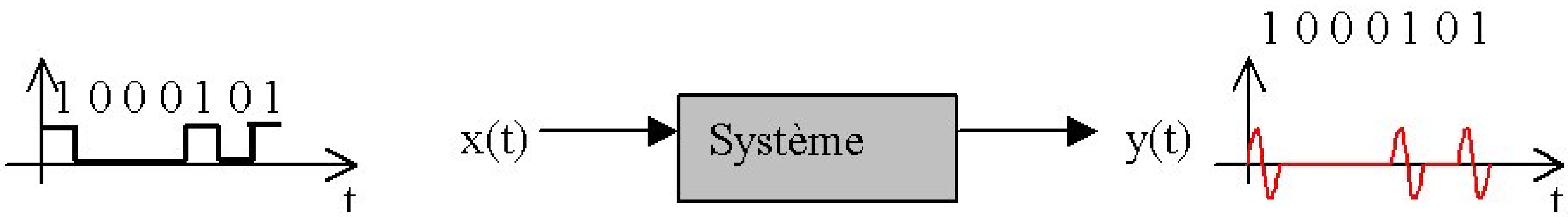


Système

Un système est un ***transformateur de signaux*** :

$$S : (T \to D_X) \to (T \to D_Y)$$

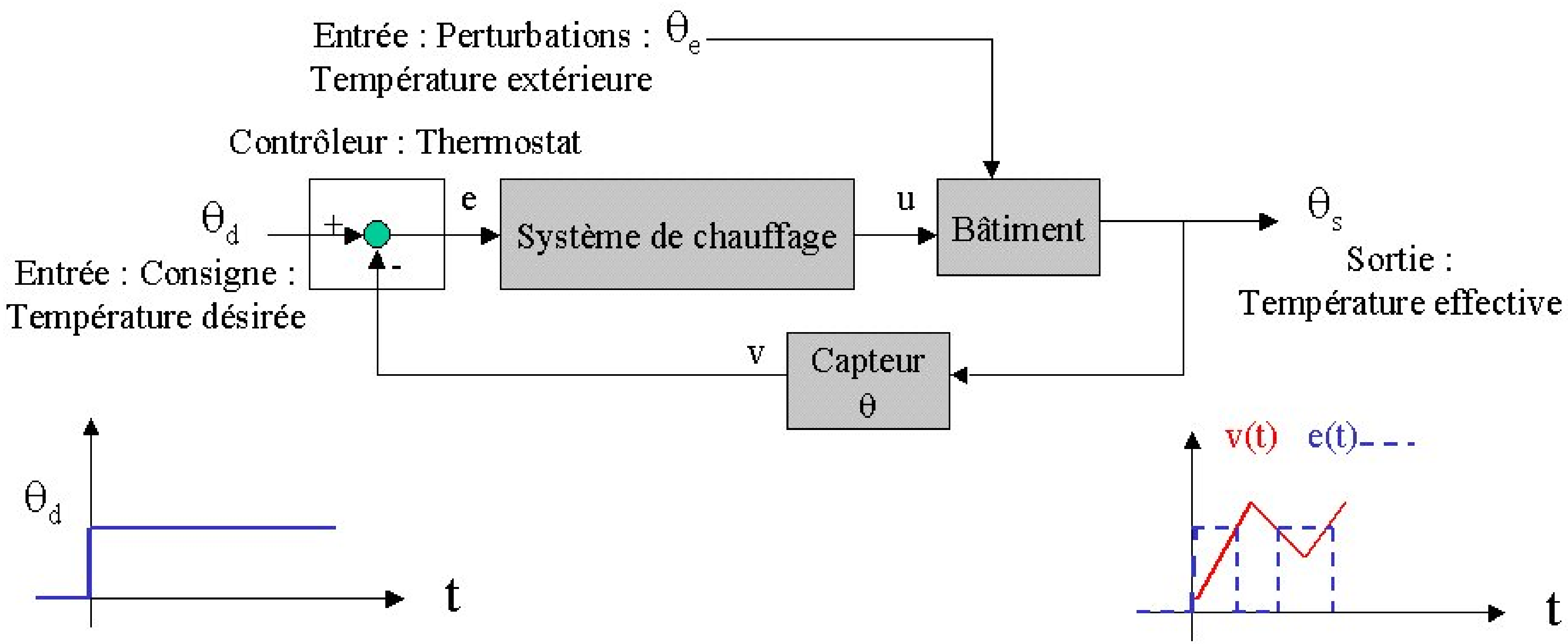
Exemple : Un modem qui transforme un signal $x(t)$ binaire en un signal continu électrique, sur le réseau télephonique.



C'est un système en ***boucle ouverte***, *c-a-d* la sortie se calcule directement à partir de l'entrée.

Système - Exemple

Un thermostat de température est un système en ***boucle fermée*** (avec une rétro-action de la sortie vers l'entrée



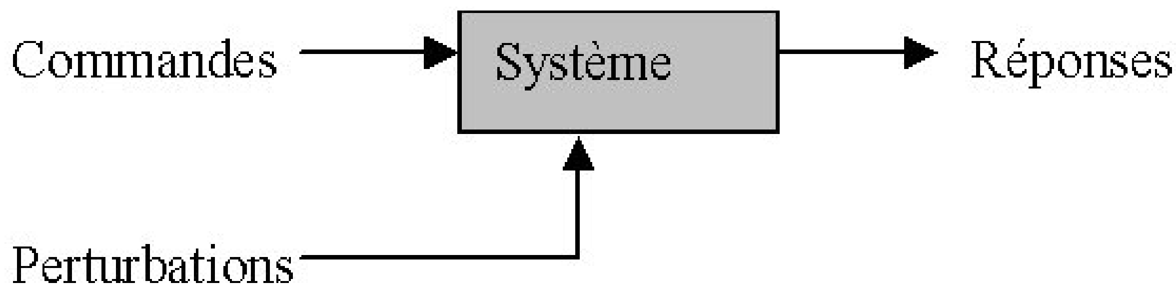
Système - Entrée/sortie

Un système : établit un lien de cause à effet entre les ***signaux d'entrée*** (excitations) et les ***signaux de sortie*** (réponses).

Parmi les entrées, on distingue :

– les ***commandes*** (sur lequelles on peut agir)

– les ***pertubations*** (que le système subit)



Définir un système dynamique - Résumé

Un système est un transformateur de signaux $S : (T \rightarrow D_X) \rightarrow (T \rightarrow D_Y)$

Pour définir un système

– ***Identifier des entrées et des sorties*** : une usine (entrées : matières premières, sorties : produits). Un ordinateur (entrées/sorties : informations venant des périphériques d'entrée/sorties)

– ***Choisir le type des signaux*** d'entrée et de sortie : D_X et D_Y

– ***Choisir le domaine de temps*** T : Z, N (temps discret), ou R, R_+ (temps continu), ou ensemble de moments d'occurrence de certains événements.

Définir directement la fonction S est difficile ! !

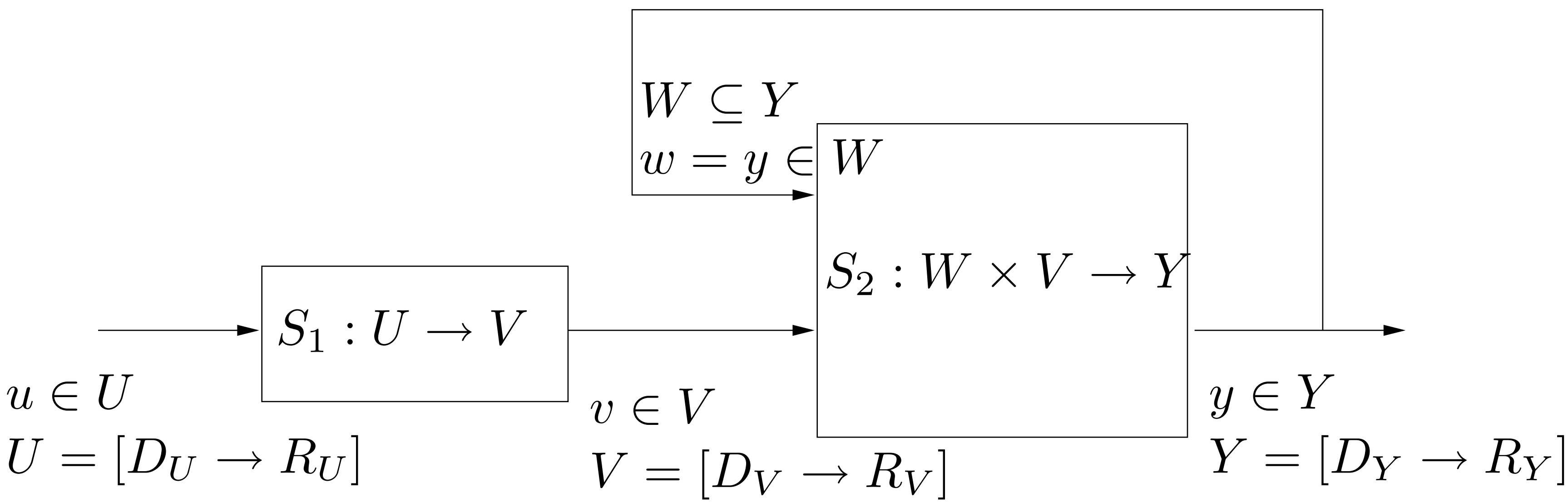
Il faut utiliser des outils d'analyse associés

– Pour les systèmes temps-continu : calculs différentiels et intégrals

– Pour les systèmes temps-discret : algèbre

Composition en utilisant des blocs diagrammes

- Blocs diagrammes : description graphique des connexions entre des composants. Chaque composant est associé à une fonction de transformation de signaux
- Connexion $\Rightarrow$ composition des fonctions.
- Hiérarchique, facile à comprendre.
- (Nous reparlerons des blocs diagrammes plus tard ! !)



Le système global $S_3 : U \rightarrow Y$ t.q. $\forall u \in U : S_3(u) = S_2(S_3(u), S_1(u))$

La connexion entre y et w est appelé ‘feedback’. Il faut résoudre l’équation $z = S_2(z, S_1(z))$

Propriétées, caractéristiques des systèmes (1)

Système linéaire vs non-linéaire

Un système est ***linéaire*** si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :

– Propriétés d'***additivité*** :

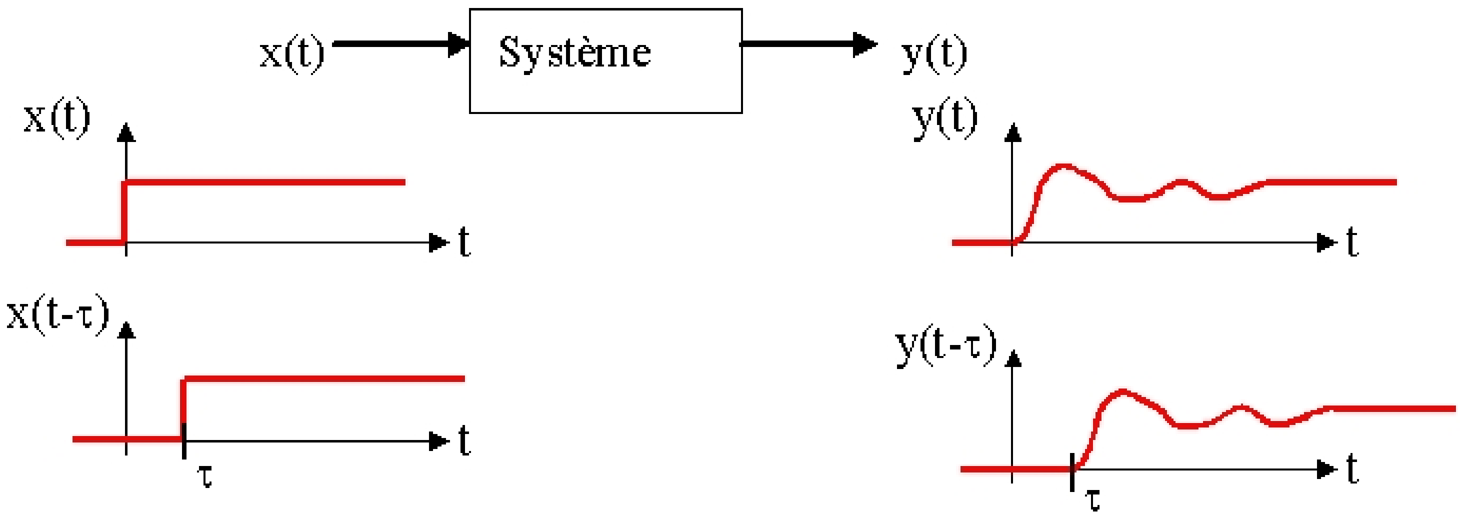
Pour l'entrée est $x_1(t)$, la sortie est $y_1(t)$. Pour l'entrée est $x_1(t)$, la sortie est $y_1(t)$. Alors, si l'entrée est $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, la sortie est $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

– Propriétés de ***homogénéité*** :

Pour l'entrée est $x_1(t)$, la sortie est $y_1(t)$. Alors, pour $\forall \alpha \neq 0$, si l'entrée est $x(t) = \alpha x_1(t)$, la sortie est $y(t) = \alpha y_1(t)$.

Propriétés, caractéristiques des systèmes (2)

Système stationnaire (invariant en temps)



Plus formellement, on dit que le système commute avec un retard :

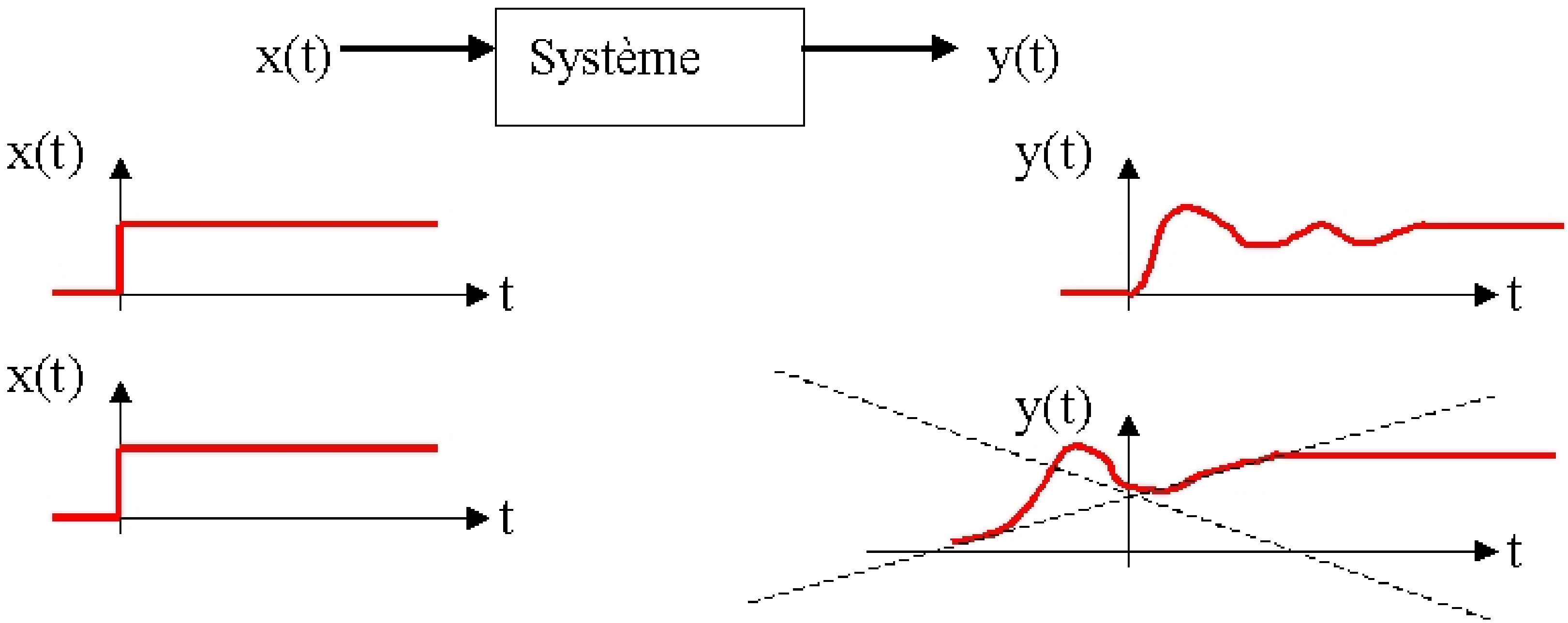
$$S(x(t-\delta)) = (Sx)(t-\delta)$$

Les systèmes linéaires stationnaires forment une classe importante historiquement et pratiquement.

Propriétés, caractéristiques des systèmes (3)

Système causal

Principe de causalité : les effets ne peuvent pas précéder les causes.

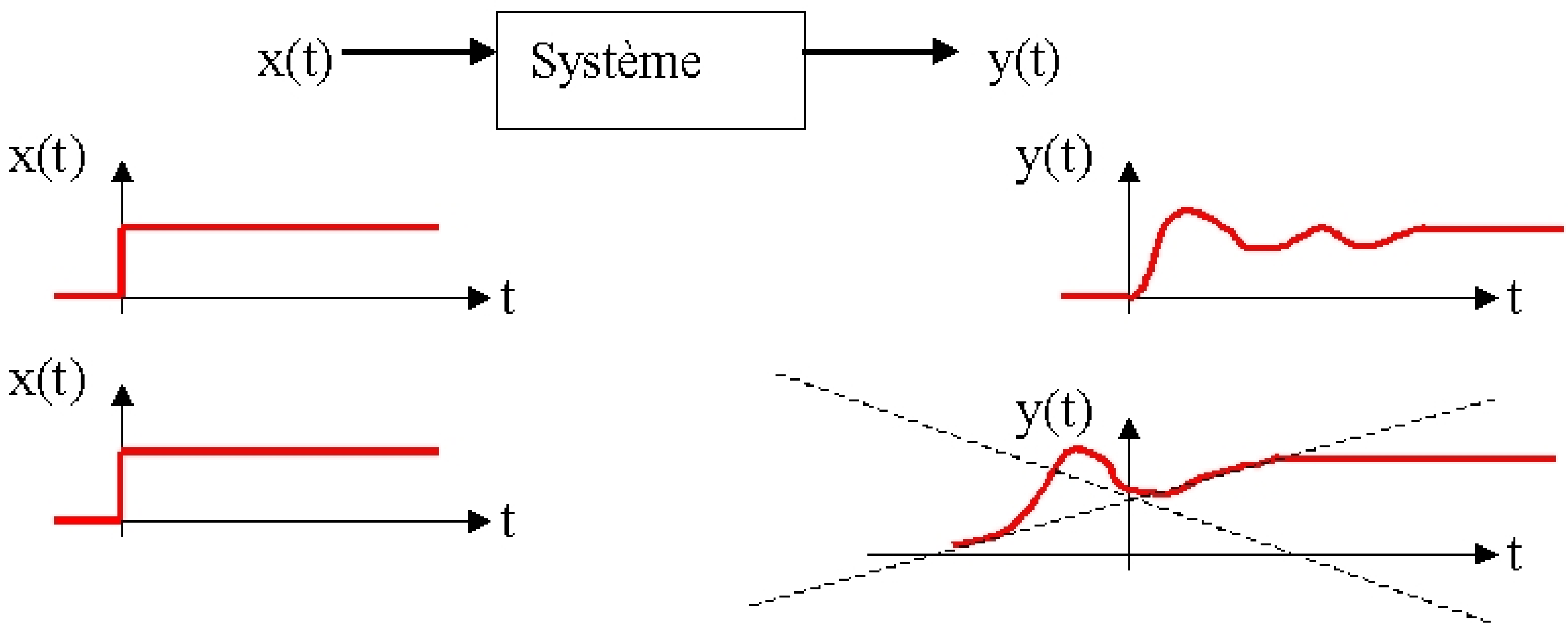


Si l'entrée $x(t)$ est nulle pour $t < 0$, alors la sortie $y(t)$ est aussi nulle pour $t < 0$.

Propriétés, caractéristiques des systèmes (4)

Système instantané vs dynamique

Système instantané (sans mémoire ou statique) : à un instant donné, la sortie ne dépend que de l'entrée à cet instant.

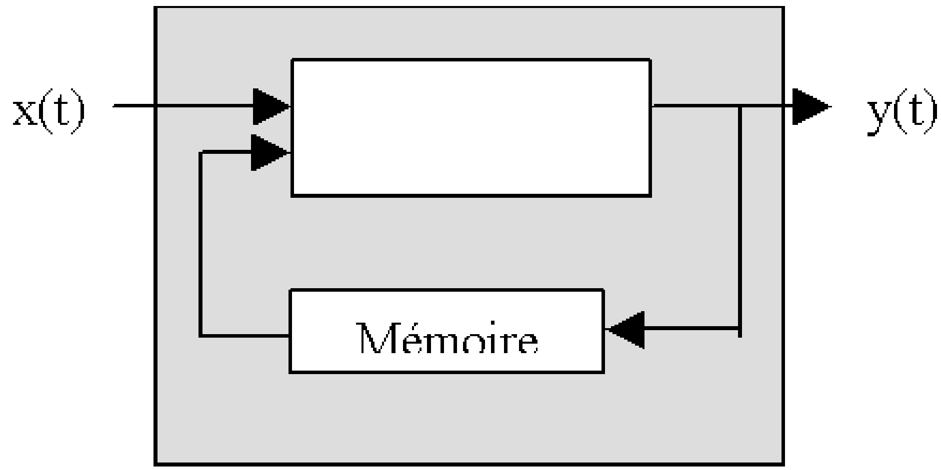


Par exemple, $y(t) = a(t)x(t)$ définit un système statique.

Système dynamique : non-statique, avec mémoire

Propriétés, caractéristiques des systèmes (5)

Système dynamique



En temps continu, l'élement mémoire est formalisé par un intégrateur. La relation entrée/sortie est décrite par des équations différentielles faisant intervenir $y(t)$ et ses dérivées.

$$y'(t) = lim_{h \to 0} \frac{(y(t) - y(t-h))}{h}$$

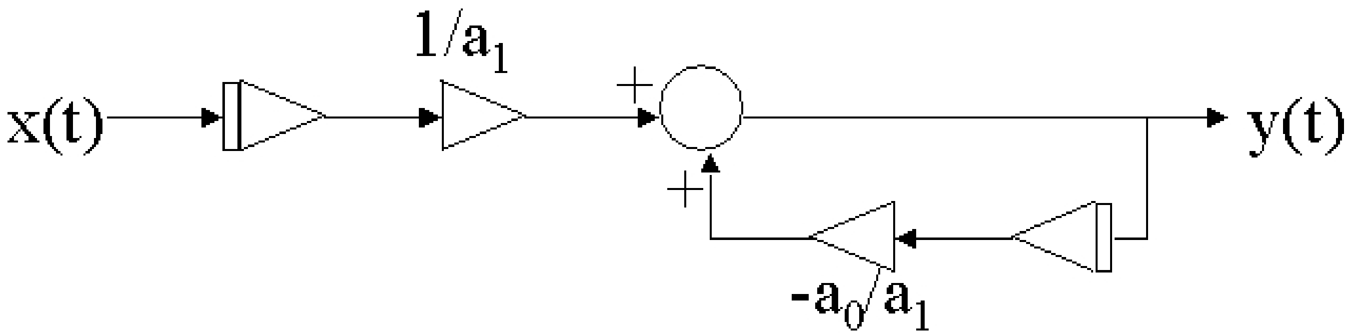
– $y'(t)$: information sur la croissance/décroissance
– $y(t)$: l'instant présent
– $y(t-h)$: l'instant passeé

Système dynamique - exemple

Considérons un système dynamique continu décrit par une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

$$y'(t) = -\frac{a_0}{a_1} y(t) + \frac{1}{a_1} x(t)$$



Ce schéma n'est pas optimisé dans le sense qu'en fait un seul intégrateur suffirait.

Modes de représentation

Pour un système continu :

- Équations différentielles (déjà vues dans le cours précédent)
- Représentation fonctionnelle
- Représentation par matrice d'état
- Représentation dans un espace transformé,par exemple via la transformée Laplace (voir le cours suivant).

Représentation fonctionnelle

Le ***schéma fonctionnel*** se déduit des équations différentielles et permet plus directement le passage vers la simulation informatique

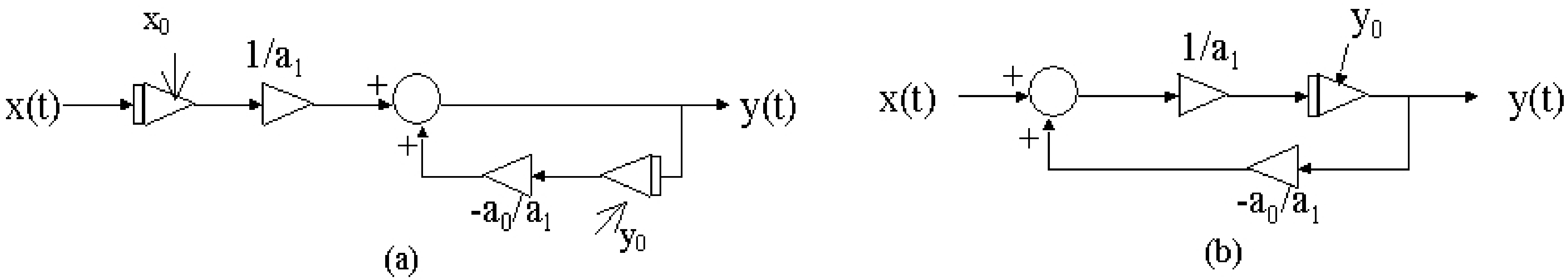
- Il est un ***programme*** dans un ***langage graphique*** reliant des ***blocs fonctionnels***
- Un ***compilateur*** traduit ce schéma en un programme informatique pour la ***résolution numérique d'équations différentielles***
- Pour décrire un système ***continu linéaire***, on a besoin des blocs fonctionnels suivants : ***amplificateurs***, ***additioneur/soustracteurs***, ***intégrateurs*** (bloc mémoire).
- Cette représentation n'est ***pas unique***

Représentation fonctionnelle - exemple

Considérons un système dynamique continu décrit par :

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

$$y'(t) = -\frac{a_0}{a_1} y(t) + \frac{1}{a_1} x(t)$$



Intégration fait intervenir les conditions initiales :

$$y(t) = \int_0^t y'(t) dt + y_0$$

Comment obtenir une représentation fonctionnelle

Obtenir systématiquement une représentation fonctionnelle associée à une équation différentielle

$$\begin{aligned}\frac{d^n y(t)}{dt^n} &= -a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt} - \ldots - a_1\frac{d^1 y(t)}{dt} - a_0 y(t)\\ &\quad +b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots b_1 + \frac{d^1 x(t)}{dt} + b_0 x(t)\end{aligned}$$

Exemple :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t) + b_0 x(t)$$

Comment obtenir une représentation fonctionnelle (2)

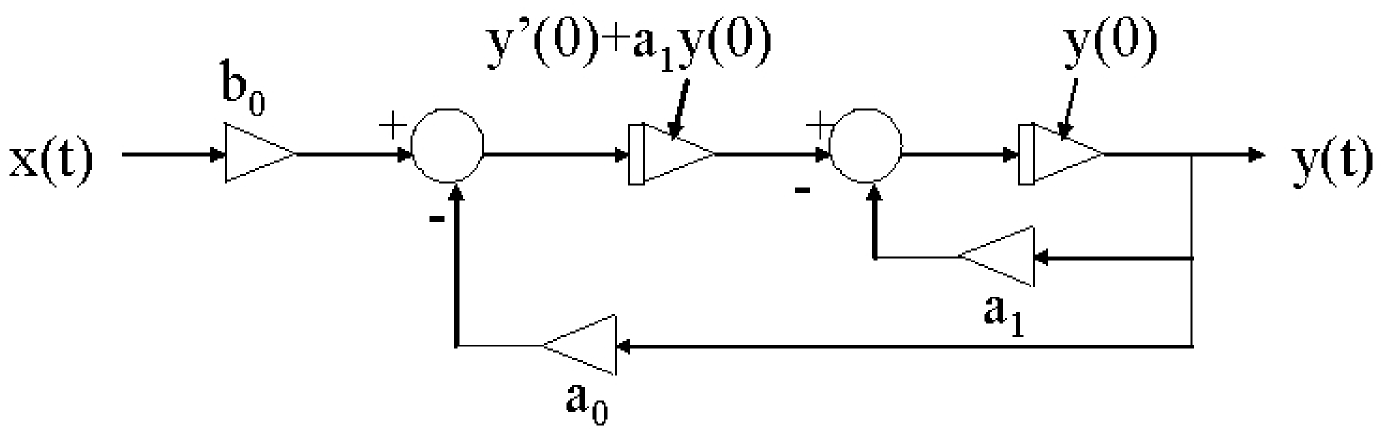
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0y(t) + b_0x(t)$$

On pose $u_1'(t) = -a_0y(t) + b_0x(t)$ et $u_2(t) = y(t)$. Donc, $u_2'' = -a_1u_2' + u_1'$.

Après une première intégration $u_2' = -a_1u_2 + u_1$.

Maintenant, en intégrant $u_2'(t)$ on obtient $y(t)$

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -a_0y(t) + b_0x(t) \\ u_2'(t) &= -a_1u_2(t) + u_1(t) \\ y(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$



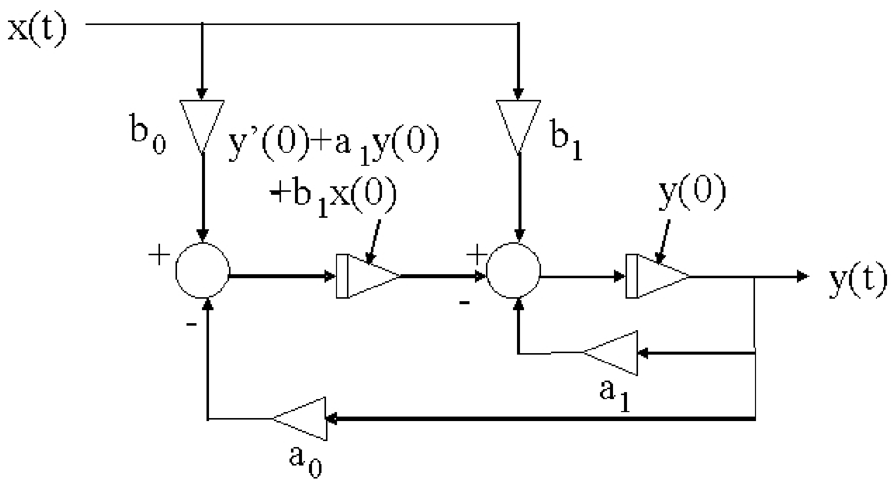
Comment obtenir une représentation fonctionnelle (3)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0y(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0x(t)$$

On pose $u_1'(t) = -a_0y(t) + b_0x(t)$ et $u_2(t) = y(t)$. Donc, $u_2'' = -a_1u_2' + b_1x' + u_1'$.

Après une première intégration $u_2' = -a_1u_2 + b_1x + u_1$. Maintenant, en intégrant $u_2'(t)$ on obtient $y(t)$

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -a_0y(t) + b_0x(t) \\ u_2'(t) &= -a_1u_2(t) + b_1x(t) + u_1(t) \\ y(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$



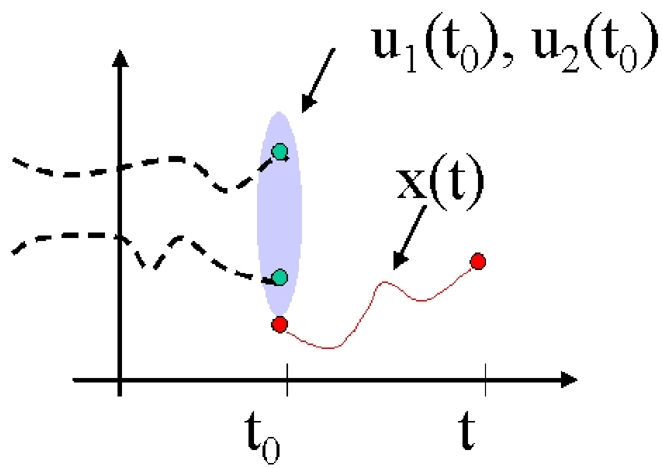
Représentation par matrice d'état (1)

Notion d'état

– Afin de spécifier la fonction S, on a souvent besoin d'un ***ensemble*** $\mathcal{X}$ d'***états internes***.

– ***Plus intuitivement***, état = ensemble d'informations minimales sur le système et sur l'éntrée afin de calculer la réponse.

– ***Plus formellement***, l'état est un vecteur contenant le nombre minimal de variables telque :
Si pour t_0, la valeur initiale $y(t_0)$ de la sortie est connu $\Rightarrow$ pour tout $t > t_0$, $y(t)$ peut être déterminés de manière unique si l'entrée $x(t)$ est connue sur l'intervalle $[t_0, t]$



Représentation par matrice d'état (2)

Exemple d'un condensateur.

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \end{aligned}$$

– Spécifier $v(t_0)$ est plus "économique" que spécifier toute l'évolution $i(t)$ de $t = -\infty$ jusqu'à $t = t_0$.

– L'état à l'instant t_0 du système doit constituer sa mémoire

– L'*état* peut être une représentation *plus compacte* que l'histoire complète du système.

Représentation par matrice d'état (3)

– L'état à l'instant t_0 du système doit constituer sa mémoire minimale du passé nécessaire à la détermination du futur

– L'état représenté par les variables internes fournit une description complète de l'évolution du système

– C'est un formalisme permettant de transformer toutes équations différentielles linéaires d'ordre n en un système d'équations différentielles d'ordre 1.

– Le choix de représentation d'état n'est pas unique

Comment obtenir une représentation par matrice d'état

Reprenons l'exemple précédent :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0y(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0x(t)$$

On avait trouvé :

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= -a_0y(t) + b_0x(t) = -a_0u_2(t) + b_0x(t) \\
u_2'(t) &= -a_1u_2(t) + b_1x(t) + u_1(t) \\
y(t) &= u_2(t)
\end{aligned}$$

Sous forme matriciel :

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} x$$

et

$$y = (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}$$

Représentation par matrice d’état

$$\begin{aligned} u' &= Au + Bx \\ y &= Cu + Dx \end{aligned}$$

- La matrice A : matrice d’état, de dimension $n \times n$
- La matrice B : matrice d’éntré, de dimension $n \times p$
- La matrice C : matrice de sortie, de dimension $q \times n$
- La matrice D : matrice de couplage, de dimension $q \times p$