Modélisation et commande du robot LEGO

Dynamique du robot

Triangle semblables :

$$v1/(r + D/2) = v2/(r-D/2)$$

avec D = entre-axe, r = rayon de courbure, v1 et v2 sont les vitesses de 2 roues.

D'où $v1 - v2 = dv = D/2(v1 + v2)/r$
$v1 - v2 = dv = Dv/r$.

Donc, $v/r = (v1-v2)/D$.

La vitesse d'avancer du robot : $v = (v1 + v2)/2$

On note par θ l'angle d'orientation du robot par rapport à un axe de référence. On a donc la relation θ = wt, ou\` w est la vitesse de rotation du robot est w.

$$x = r \sin wt$$
$$y = r \cos wt$$

$$x' = rw \cos wt$$
$$y' = - rw \sin wt$$

$$x'' = - rw^2 \sin wt$$
$$y'' = - rw^2 \cos wt$$

Au voisinage de t = 0

$$y'' = -rw^2$$

D'où, les équations différentielles décrivant l'évolution de la trajectoire du robot sont :

$$x' = (v1 + v2)\cos(\theta)/2$$
$$y' = - (v1 - v2)\sin(\theta)/2$$
$$\theta' = w = (v1 - v2)/D$$

ou\` D = entre-axe (distance entre deux roues), v1 et v2 sont les vitesses de 2 roues.

Calcul de contrôleurs

On va considérer un problème de trouver un contrôleur du type PID pour amener le robot d'un point initial (x_0, y_0) vers un point final (x_f, y_f).

La stratégie de commande que l'on va utiliser est comme suit. On utilise deux contrôleurs. L'un pour tourner le robot vers l'angle désirée (définie par le segment reliant le point initial et le point final. L'autre est pour contrôler la vitesse d'avancer du robot. D'abord, le premier est utilise (si le robot est assez loin du point initial) pour tourner le robot vers la bonne direction. Ensuite, le deuxième est utilise (en gardant l'orientation inchangée) pour amener le robot vers le point final.

C'est un modèle non-linéaire. Si l'on suppose que le robot est déjà dans la bonne direction, on va calculer un contrôleur de vitesse, en faisant l'hypothèse que θ soit constant.

Quand θ est constant, les équations différentielles deviennent :
$x' = (v1 + v2)\, Mc/2$
$y' = -\,(v1 + v2)\, Ms/2$
$\theta' = (v1 - v2)/D.$
ou\` $Mc = \cos(\theta)$ et $Ms = \sin(\theta)$.

On considère une variable $\alpha = x/Mc$. Cette variable décrit la distance du robot vers le point cible dans la direction de θ (qui est supposée constante). La dérivée de α s'écrit :
$\alpha' = x' = v/2.$

Si on fixe la position finale comme les références, notons que quand le robot atteint le point final, $\alpha=0$.

On peut ensuite calculer la fonction transfert $H(s)$ entre α et v.
Si l'on utilise un contrôleur PID pour régulariser α autour 0,
$C(s) = Kp + Kd\, s + Ki\, \frac{1}{s}$

Notre problème maintenant est de trouver les valeurs des coefficients Kp, Ki et Kd.

La fonction transfert de la boucle ouverte est C(s)H(s) et la fonction transfert de la boucle fermée est :

$$F(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)}$$

Pour la stabilité de la boucle fermée, on doit assurer que F(s) ait des pôles stables. Ceci définit des conditions que les coefficients Kp, Ki et Kd doivent satisfaire. En plus, on peut aussi considérer des critères de performance (temps de montée, pas de dépassement, etc.) dans le choix des valeurs de ces coefficients.

Le calcul du contrôleur de θ peut être fait de la même manière.

Ensuite on doit combiner les deux contrôleurs, soit par leurs conditions de validité (c.-à-d. quand les utilise), soit par une somme de leur sorties multiplies avec de différents poids.