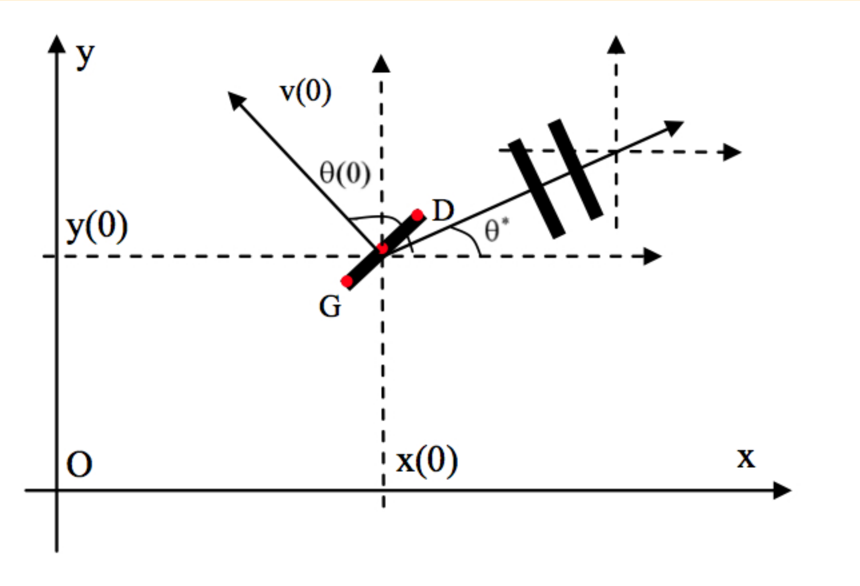
Modélisation de trajectoires du robot (1)



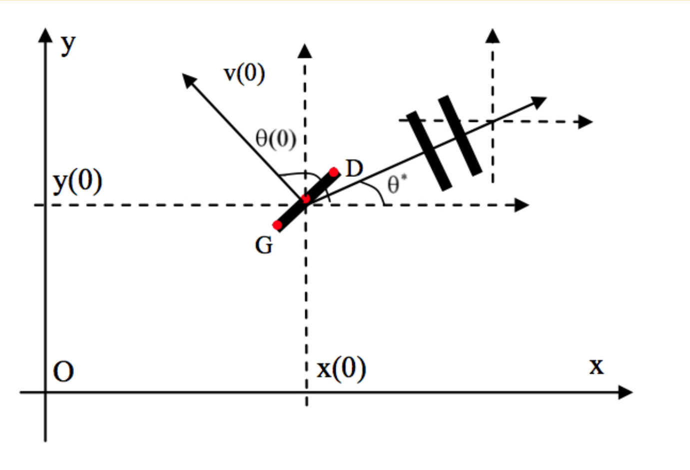
Triangle semblables : $v_g/(r+l/2) = v_d/(r-l/2)$, avec l = entre-axe, r = rayon de courbure

D'où $v_g - v_d = dv = l(v_g + v_d)/(2r)$

$$v_g - v_d = dv = lv/r$$

Donc, $v/r = (v_g - v_d)/l$.

Modélisation de trajectoires du robot (2)



La vitesse d'avancer du robot : $v = (v_g + v_d)/2$. Vitesse de rotation w

$$x = rsin(wt)$$
$$y = rcos(wt)$$

$$x' = rwcos(wt) \quad y' = -rwsin(wt)$$

Modélisation de trajectoires du robot (3)

On a aussi la relation $\theta = -wt$. D'où, les équations différentielles décrivant l'évolution de la trajectoire du robot sont :

$$x' = (v_g + v_d)cos(\theta)/2$$
$$y' = (v_g + v_d)sin(\theta)/2$$
$$\theta' = (v_g - v_d)/l$$

où $l =$ entre-axe (distance entre deux roues), v_g et v_d sont les vitesses des deux roues.

C'est un modèle non-linéaire !!

Commande de trajectoires du robot

On va considérer un problème de trouver un contrôleur du type PID pour tourner le robot d'une orientation initiale θ_0 vers l'orientation finale θ^*.

Contrôle de l'orientation du robot

Nous contrôlons **l'orientation** du robot par un contrôleur de type PI dont la fonction de transfert est :

$$C_\theta(s) = \frac{k_{i\theta}}{s} + k_{p\theta} \tag{1}$$

où $k_{p\theta}$ est le coefficient de l'action proportionelle et $k_{i\theta}$ est le coefficient de l'action intégrale.

Variable de commande

Nous utilisons la différence entre les vitesses des roues pour contrôler l'orientation du robot, nous avons ainsi la variable de commande u_θ :

$$u_\theta = (v_d - v_g)$$

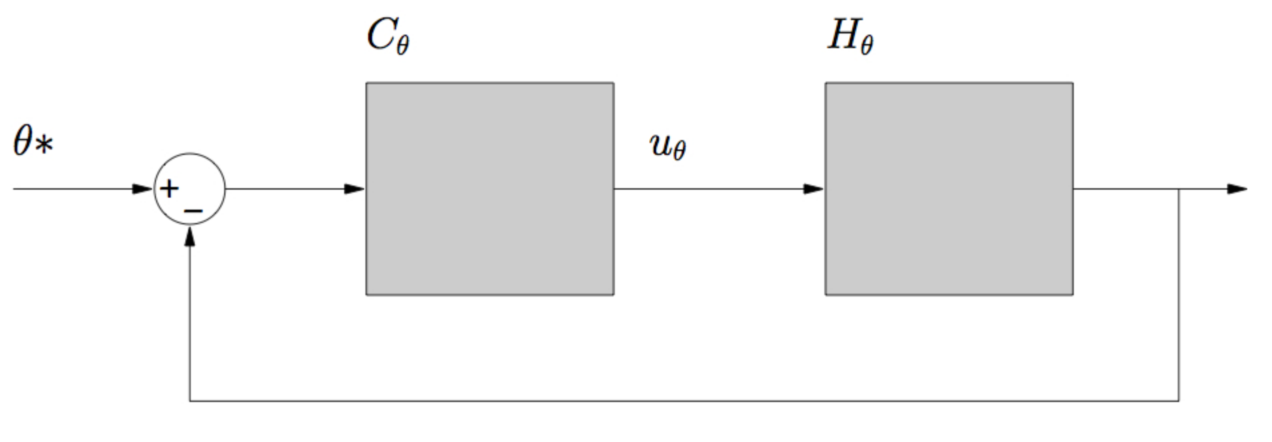
De l'équation de θ on obtient : $\dot{\theta} = u_\theta / l$, ce qui donne en transformée de Laplace $s\theta(s) = u_\theta(s)/l$ (en supposant que les conditions initiales sont 0).

La fonction de transfert de θ est alors :

$$H_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{1}{ls}$$

Schéma de commande

La sortie u_θ du contrôleur $C_\theta(s)$ est connectée à l' entrée du bloc $H_\theta(s)$ correspondant au modèle de la dynamique de l'orientation du robot.
L'entrée du contrôleur $C_\theta(s)$ est la différence entre la sortie θ de $H_\theta(s)$ et l'orientation désirée θ^*.



Fonction de transfert en boucle fermée

L'évolution de θ contrôlée par la commande u_θ peut donc être representée par un système en boucle fermée dont la fonction de transfert est :

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{C_\theta(s)H_\theta(s)}{1 + C_\theta(s)H_\theta(s)} \\
&= \frac{\dfrac{k_{p\theta}}{l}s + \dfrac{k_{i\theta}}{l}}{s^2 + \dfrac{k_{p\theta}}{l}s + \dfrac{k_{i\theta}}{l}}
\end{aligned}
$$

Réglage du contrôle de l'orientation du robot

Notons $\alpha = 1/l$. Si l'on choisit $k_{i\theta} = \omega^2/\alpha$ et $k_{p\theta} = 2\xi\omega/\alpha$ (avec $\omega > 0$, $\xi > 0$), le système en boucle fermée est du deuxième ordre avec un gain statique de 1, une pulsation ω et un amortissement ξ.

Notons que les pôles du système en boucle fermée sont

$$p_{1,2} = -\omega(\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}).$$

avec les parties réelles $Re(p_{1,2}) < 0$, ce qui garantit la stabilité de θ.

Il nous reste la liberté de choisir des valeurs de ω et de ξ afin d'obtenir des performances désirées (temps de réponse, dépassement, etc).

Commande de la vitesse du robot

Pour contrôler la vitesse du robot, il faut ajouter un **contrôleur de vitesse**.

La variable de commande est alors $(v_g + v_d)$

Pour suivre une ligne, quand le robot est tres dévié de la ligne, il faut que le robot roule avec une vitesse réduite. Quand le robot est bien aligné avec la ligne, le robot roule avec une vitesse plus grande.

Combinaison de deux contrôleurs.

Notons que la sortie du contrôleur d'orientation est $(v_d - v_g)$ et celle du contrôleur de vitesse est $(v_g + v_d)$. A partir de ces sorties on peut calculer v_g et v_d comme suit :

$$v_d = (u_\delta + u_\theta)/2, \tag{2}$$

$$v_g = (u_\delta - u_\theta)/2. \tag{3}$$

Les valeurs de v_g et v_d doivent satisfaire les limites de vitesse du robot LEGO.