Magistère d'Informatique de Grenoble

Michaël PÉRIN, VERIMAG / Université Grenoble-Alpes

MIG – Université Grenoble-Alpes

Travail à rendre à la séance de mars

Exercice : Application de l'isomorphisme de Curry-Howard (3 pt)

Q1. (1 pt) On définit comme suit l'opérateur `op` qui prend en paramètre deux fonctions f et g et constuit une fonction (à un paramètre x) qui combine f et g.

```
let op  f g = fun x  →  f (x, g x)
```

Complétez les types de f, g, x et `op` :

f : .... → ......

g : ....

x : ......

`op` : (...................................) → (.....................) → (.......................)

Q2. (1 pt) En déduire le théorème logique associé à l'opérateur `op` par l'isomorphisme de Curry-Howard

Preuve utilisant la conjonction et l'implication

Q3. (1 pt) Démontrez le théorème $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Longrightarrow (A \Rightarrow C)$ en définissant un opérateur caml `op'` du type

```
('a → 'b) * ('b → 'c) → ('a → 'c)
```

Preuve utilisant la disjonction

La disjonction $A \vee B$ de la logique peut être représentée par le type Ocaml

```
type ('a,'b) disj =
 | L of 'a
 | R of 'b
```

Q4. (1 pt) **Exploitez l'isomorphisme de Curry-Howard** afin de démontrez le théorème suivant

$$\big(A \Rightarrow C \ \wedge \ B \Rightarrow C\big) \Longrightarrow \big((A \vee B) \Rightarrow C\big)$$

en donnant une fonction Ocaml de type

```
('a → 'c * 'b → 'c) → (('a,'b) disj → 'c)
```

À titre de comparaison voici la preuve du théorème en déduction naturelle et en français. Vous constaterez que la version OCAML est plus courte.

Preuve en déduction naturelle

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\overbrace{A \vee B}^{H_2}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\overbrace{A}^{H_3}
\quad
\dfrac{\overbrace{(A \Rightarrow C)\ \wedge\ (B \Rightarrow C)}^{H_1}}{H_1\ \vdash\ A \Rightarrow C}\ \wedge_{e_1}
}{H_3, H_1\ \vdash\ C}\ \Rightarrow_e
}{H_1\ \vdash\ A \Rightarrow C}\ \Rightarrow_i [H_3]
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\overbrace{B}^{H_4}
\quad
\dfrac{\overbrace{(A \Rightarrow C)\ \wedge\ (B \Rightarrow C)}^{H_1}}{H_1\ \vdash\ B \Rightarrow C}\ \wedge_{e_2}
}{H_4, H_1\ \vdash\ C}\ \Rightarrow_e
}{H_1\ \vdash\ B \Rightarrow C}\ \Rightarrow_i [H_4]
}{H_1, H_2\ \vdash\ C}\ \vee_e
}{H_1\ \vdash\ (A \vee B) \Rightarrow C}\ \Rightarrow_i [H_2]
}{((A \Rightarrow C)\ \wedge\ (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)}\ \Rightarrow_i [H_1]
$$

Traduction en français

```
Démontrons (((A ==> C) /\ (B ==> C)) ==> ((A \/ B) ==> C)) :
supposons ((A ==> C) /\ (B ==> C)) (hypothèse [H1]) et montrons ((A \/ B) ==> C) :
{ Preuve de ((A \/ B) ==> C) :
  supposons (A \/ B) (hypothèse [H2]) et montrons C :
  { Preuve de C :Pour cela exploitons la disjonction (A \/ B)
      qui correspond à l'hypothèse [H2]
    Comme on ne sait pas lequel est vrai parmi les deux membres de la disjonction (A \/ B)
    Pour montrer C il nous faut le prouver dans chacun des cas :
    - Cas 1: Démontrons (A ==> C) :
          supposons A (hypothèse [H3]) et montrons C :
          c'
            Puisqu'on a A d'après [H3], il suffit, pour obtenir C, de montrer (A ==> C)

            qui est la partie droite de la conjonction ((A ==> C) /\ (B ==> C))
              qui correspond à l'hypothèse [H1]

    - Cas 2: Démontrons (B ==> C) :
          supposons B (hypothèse [H4]) et montrons C :
          c'
            Puisqu'on a B d'après [H4], il suffit, pour obtenir C, de montrer (B ==> C)

            qui est la partie gauche de la conjonction ((A ==> C) /\ (B ==> C))
              qui correspond à l'hypothèse [H1]

  }: on a ainsi montré C
}: on a ainsi montré ((A \/ B) ==> C)
Ceci achève la démonstration de (((A ==> C) /\ (B ==> C)) ==> ((A \/ B) ==> C))
```