

(Sujet commun ENS : ULM et LYON)

DURÉE : 6 heures

L'objet de ce problème est de faire démontrer quelques résultats d'arithmétique (approximation des nombres réels par les nombres rationnels) et d'en donner quelques applications à la théorie ergodique des systèmes dynamiques.

Les différentes parties du problème peuvent être résolues indépendamment; toutefois, les parties III et IV utilisent certains résultats et définitions donnés dans les parties I et II.

Aucun raisonnement vague ou incomplet ne sera considéré comme une démonstration. Toutefois, en l'absence d'une démonstration rigoureuse et complète, une réponse juste à une question dont le résultat n'est pas donné dans l'énoncé pourra se voir attribuer une partie des points alloués à cette question. On demande donc aux candidats d'encadrer ou d'indiquer très clairement les résultats finaux auxquels ils sont parvenus dans chaque question.

I

Dans tout le problème on note $[\theta]$ la partie entière d'un nombre réel θ et $\{\theta\} = \theta - [\theta]$ sa partie fractionnaire. Dans cette partie seulement on note $\|\theta\| = \inf(\{\theta\}, 1 - \{\theta\})$.

1] a) Soit θ et $Q > 1$ deux nombres réels. On considère les deux parties de \mathbb{N}

$$A = \{q \in \mathbb{N}, 0 < q \leq Q \mid \|q\theta\| \leq Q^{-1}\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{N}, 0 < q \leq Q \mid \|q\theta\| < Q^{-1}\}$$

A peut-il être vide? Même question pour B . (Indication: on pourra considérer simultanément la partie $\{0, 1, \{q\theta\} \mid 0 < q < Q\}$ de $[0, 1]$ et la subdivision $0 < Q^{-1} < 2Q^{-1} < \dots < (Q-1)Q^{-1} < 1$).

b) Que peut-on dire du nombre de solutions de l'inéquation d'inconnue $q \in \mathbb{N}$: $q\|q\theta\| < 1$?

2] Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a) Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les propriétés suivantes

(i) $q_1 = 1$ et la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|q_n \theta\| = |q_n \theta - p_n|$;

(iii) la suite $(\|q_n \theta\|)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante;

(iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier q tel que $0 < q < q_{n+1}$, on a $\|q\theta\| \geq \|q_n \theta\|$.

Les propriétés (i)-(iv) définissent-elles (p_n) et (q_n) de manière unique?

b) Comment doit-on modifier l'énoncé précédent lorsque l'on suppose au contraire $\theta \in \mathbb{Q}$?

3] Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et les suites $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ construites au 2].

a) Démontrer les propriétés suivantes:

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\theta - \frac{p_n}{q_n}| \leq (q_n q_{n+1})^{-1}$ (on pourra en particulier procéder comme dans I.1.a);

(ii) si $0 < \theta < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq p_n \leq q_n$.

b) Etudier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le signe de $(q_n \theta - p_n)(q_{n+1} \theta - p_{n+1})$ (on pourra évaluer $q_{n+1} \theta - p_{n+1}$ en utilisant le (i)).

c) Dédire du b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs des expressions $q_{n+1} p_n - q_n p_{n+1}$ et $q_{n+1} \|q_n \theta\| + q_n \|q_{n+1} \theta\|$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $a_n \in \mathbb{N}^*$ tel que

(i) $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$ et $p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}$;

Paris et Lyon 2/5

(ii) calculer $|q_{n-1}\theta - p_{n-1}| - |q_{n+1}\theta - p_{n+1}|$.

(Indication: on pourra utiliser le c)).

4] Soit $\theta \in]0, 1[\setminus \mathbf{Q}$ et soient les suites d'entiers relatifs $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ définies par récurrence par les relations:(i) $u_0 = v_1 = 1$ et $u_1 = v_0 = 0$;(ii) u_k et v_k étant connus pour $0 \leq k \leq n$, on définit

$$\alpha_n = \left[\frac{|v_{n-1}\theta - u_{n-1}|}{|v_n\theta - u_n|} \right];$$

(iii) $u_{n+1} = \alpha_n u_n + u_{n-1}$ et $v_{n+1} = \alpha_n v_n + v_{n-1}$.Comparer les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(p_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$. (Indication: considérer successivement les cas $0 < \theta < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \theta < 1$; on pourra également s'aider de I.3.d (ii)). Calculer $v_{n+1}u_n - v_n u_{n+1}$ et comparer le résultat avec le 3] b).

II

On notera, dans la suite $S^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. On note $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$; on note également $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$.

Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$; on dit que P est irréductible si et seulement si l'égalité $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbf{Q}[X]$ implique Q ou R constant non nul.

1] Pour $n \in \mathbf{N}^*$, C et $s \in]0, +\infty[$, on note

$$D(n, s, C) = \{\omega \in S^{n-1} \mid \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}, |\omega \cdot k| \geq C|k|^{-s}\}.$$

a) Cas $n = 2$. Pour $k \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}$, quelle est la nature géométrique de

$O_k = \{\omega \in S^1 \mid |\omega \cdot k| < C|k|^{-s}\}$? En déduire que pour tout $s > 1$, il existe $C(s) > 0$ tel que pour tout $0 \leq C \leq C(s)$, $D(2, s, C) \neq \emptyset$ (On pourra étudier suivant la valeur de s la quantité $\sup_{A>0} \sum_{k \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}, |k| \leq A} |k|^{-s-1}$).

b) Cas $n \geq 3$. Montrer que pour tout $s > n - 1$, il existe $C(s) > 0$ tel que pour tout $0 \leq C \leq C(s)$, $D(n, s, C) \neq \emptyset$.

On dira que $\theta \in \mathbf{R}$ est algébrique de degré $d > 0$ sur \mathbf{Q} si et seulement si θ est racine d'un polynôme irréductible de degré d de $\mathbf{Q}[X]$.

2] Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ un nombre algébrique de degré d sur \mathbf{Q} . Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et tout $p \in \mathbf{Z}$

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{|q|^d}.$$

(Indication: soit $P(X)$ polynôme à coefficients entiers relatifs admettant θ pour racine; on pourra calculer $P(p/q)$).

3] Donner, en justifiant soigneusement votre réponse, un exemple de nombre réel non algébrique, en s'appuyant sur le 2]. (On pourra penser à la somme d'une série).

4] $D(2, 1, C)$ est-il vide pour toute valeur de $C > 0$?

5] a) Soit S une partie de \mathbf{R}^n de volume $V > 1$. Montrer que S contient deux vecteurs distincts, v_1 et v_2 tels que $v_1 - v_2 \in \mathbf{Z}^n$. (On pourra se ramener au cas où S est borné et considérer les translatés $S + \alpha$ avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq p$ où p est un entier positif).

b) Soit S' une partie convexe de \mathbf{R}^n , invariante par $-Id_{\mathbf{R}^n}$ et de volume $V' > 2^n$. Etudier si $S' \cap (\mathbf{Z}^n \setminus \{0\})$ est vide.

6] On se propose de montrer dans cette question que si $s < 1$, $D(2, s, C) = \emptyset$ pour tout $C > 0$.

On fixe $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in S^1$ avec $\omega_2 \neq 0$. Soient α et Z deux éléments de $]1, +\infty[$, et considérons

$$R(Z, \alpha) = \{k = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |k_1| \leq \alpha Z, \text{ et } \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} k_1 + k_2 \right| \leq Z^{-1}\}.$$

a) Décrire géométriquement $R(Z, \alpha)$ et calculer sa surface.

b) En déduire que si $s < 1$, $D(2, s, C) = \emptyset$ pour tout $C > 0$.

7] Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, $D(n, s, C) = \emptyset$ pour tout $C > 0$ si $s < n - 1$.

III

On notera, dans la suite, $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2$ et, pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^2$, $\langle x \rangle \in \mathbf{T}^2$ sa classe dans \mathbf{T}^2 . Soit $A \subset \mathbf{R}^2$; on note $\langle A \rangle = \{\langle x \rangle \mid x \in A\} \subset \mathbf{T}^2$. Soit $x \in \mathbf{R}^2$; on dit que les composantes de x sont rationnellement liées si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}$ tel que $x \cdot k = 0$. On note $B(x, r) = \{z \in \mathbf{R}^2 \mid |z - x| < r\}$ et $\overline{B}(x, r)$ son adhérence.

1] Soit G un sous-groupe non dense de $(\mathbf{R}, +)$ et non réduit à $\{0\}$. Montrer que $G \cap]0, +\infty[$ admet un minimum noté α ; comparer G et $\alpha\mathbf{Z}$.

2] Soit $\omega \in S^1$. Soit $x \in \mathbf{R}^2$; l'ensemble $\{x + t\omega + 2\pi k \mid t \in \mathbf{R} \text{ et } k \in \mathbf{Z}^2\}$ est-il dense dans \mathbf{R}^2 ? (Indication: on distinguera 2 cas suivant que les composantes de ω sont rationnellement liées ou non).

3] Soit $\omega \in S^1$ et $R > 0$.

a) Y a-t-il équivalence entre

(i) il existe $x \in \mathbf{R}^2$ tel que $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \langle \overline{B}(x + t\omega, R/2) \rangle = \mathbf{T}^2$;

(ii) pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \langle \overline{B}(x + t\omega, R/2) \rangle = \mathbf{T}^2$.

b) On suppose maintenant ω à composantes non rationnellement liées. Existe-t-il $T > 0$ tel que (i) et (ii) soient satisfaites? (On pourra considérer l'ensemble $[0, 2\pi]^2$).

Dans ce cas, on dira que ω remplit \mathbf{T}^2 à R près en temps T .

4] Soit $\mathcal{F} = \{\omega \in S^1 \mid 0 < \omega_2 < \omega_1\}$. Soit $\omega \in \mathcal{F}$ à composantes non rationnellement liées.

a) Soit dans \mathbf{R}^2 les droites D d'équation $x_1 = 0$ et D' d'équation $x_1 = 2\pi$; à tout point x de D on associe l'intersection de la droite affine passant par x et de vecteur directeur ω avec D' . Montrer que cette application de D dans D' induit une application notée \mathcal{R} de l'ensemble $\{(y_1, y_2) \in \mathbf{T}^2 \mid y_1 = 0 \text{ mod. } 2\pi\}$ dans lui-même. En identifiant cet ensemble au cercle S^1 , quelle est la nature géométrique de \mathcal{R} ?

Paris et Lyon 4/5

b) On suppose qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ et $0 < l < 2\pi$ tel que pour tout arc de cercle γ de longueur l , $\bigcup_{0 \leq n \leq N-1} \mathcal{R}^n(\gamma) = S^1$.

Si tel est le cas, on dit que \mathcal{R} remplit S^1 à l près en N itérations.

Déterminer des valeurs $T > 0$ et $0 < R < l$ en fonction de N telle que ω remplisse \mathbf{T}^2 à R près en temps T .

5] Soient $s > 0$ et $C > 0$ tels que $D(2, s, C)$ soit non vide (cf. II) et soit $\omega \in \mathcal{F} \cap D(2, s, C)$. Posons $\theta = \omega_2/\omega_1$. Soit enfin $R \in]0, 2\pi[$.

a) Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ un couple de suites d'entiers relatifs associés à θ comme au I 2]. Existe-t-il n tel que $\frac{2\pi}{q_{n+1}} \leq \frac{l}{3} < \frac{2\pi}{q_n}$?

b) Comparer q_{n+1} et $[3^s(2\pi)^s \sqrt{2}^s / (Cl^s)]$.

c) Montrer qu'il existe une constante K que l'on déterminera telle que \mathcal{R} remplit S^1 à l près en $[K/(Cl^s)]$ itérations. (Indication: on pourra considérer simultanément l'action sur S^1 des itérées de \mathcal{R} et de la rotation d'angle $2\pi \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$).

6] Dédurre de ce qui précède que si $s > 0$ et $C > 0$ tels que $D(2, s, C)$ soit non vide, il existe une constante K' à déterminer telle que ω remplit \mathbf{T}^2 à R près en temps K'/CR^s .

IV

On appelle *polynôme trigonométrique des n variables x_1, \dots, x_n* une combinaison linéaire à coefficients complexes d'un nombre fini de fonctions de la forme $e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}$ avec $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$. Soit f un polynôme trigonométrique des deux variables x_1 et x_2 ; on note, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$

$$\hat{f}(k_1, k_2) = \int \int_{[0, 2\pi]^2} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

On note E_n l'ensemble des polynômes trigonométriques à n variables.

On considère dans cette partie la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on identifie à l'application linéaire sur \mathbf{R}^2 qu'elle représente dans la base canonique.

1] Montrer qu'il existe une unique application T de \mathbf{T}^2 dans \mathbf{T}^2 telle que $\forall x \in \mathbf{R}^2$, $T(< x >) = < Mx >$; montrer que cette application est bijective et calculer sa réciproque.

2] a) Soit I un intervalle ouvert de $]0, 2\pi[$ dont on note χ la fonction caractéristique. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique g en la variable x , tel que

$$\int_0^{2\pi} |\chi(x) - g(x)|^2 dx < \epsilon.$$

b) Soient f et g deux polynômes trigonométriques des deux variables x_1 et x_2 ; montrer que l'expression

$$\int \int_{[0, 2\pi]^2} f(M^n(x_1, x_2)) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

admet pour $n \rightarrow \pm\infty$ une limite que l'on calculera. (Indication: on pourra considérer l'action sur $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ du groupe des itérées de M : $\{M^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; pour cela, il sera utile de faire intervenir les valeurs propres et vecteurs propres de M).

c) Soient P_1 et P_2 deux pavés ouverts de $]0, 2\pi[{}^2$; on note $P_2 + 2\pi\mathbb{Z}^2 = \{x + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que la suite

$$\frac{\text{aire}(M^n P_1 \cap (P_2 + 2\pi\mathbb{Z}^2))}{\text{aire}(P_1)} \rightarrow \frac{\text{aire}(P_2)}{4\pi^2} \text{ pour } n \rightarrow \pm\infty.$$

Ce dernier énoncé signifie que l'application T est "mélangeante".

3] Soit $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante et tendant vers zéro à l'infini. On considère

$$H_\chi = \{f \in E_2 \mid \forall R > 0, \sum_{\sup(|k_1|, |k_2|) \geq R} |\hat{f}(k)|^2 \leq \chi(R)^2 \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2\}$$

On expliquera brièvement pourquoi cette définition a bien un sens. Le but de cette question est de faire établir la vitesse de la convergence de la quantité intervenant au 2] b).

a) Soit (e_+, e_-) une base de vecteurs propres unitaires de M où e_+ est associé à λ_+ , la plus grande valeur propre. Montrer qu'il existe $C > 0$ que l'on déterminera tels que $e_+ \in D(2, 1, C)$ et $e_- \in D(2, 1, C)$.

b) Déterminer une constante $c > 0$ telle que pour tout $R > 0$ et tout $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ avec $\sup(|k_1|, |k_2|) \leq R$, $|M^{-n}k| \geq c\lambda_+^n R^{-1}$.

c) Montrer qu'il existe une constante c' que l'on déterminera telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute paire de fonctions f et $g \in H_\chi$ telles que

$$\int \int_{[0, 2\pi]^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int \int_{[0, 2\pi]^2} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0.$$

l'on ait

$$\left| \int \int_{[0, 2\pi]^2} f(M^n(x_1, x_2)) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq 2 \left(\int \int_{[0, 2\pi]^2} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int \int_{[0, 2\pi]^2} |g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \chi(c' \lambda_+^{n/2}).$$