INF 232
Automates et langages

Yassine Lakhnech

Yassine.Lakhnech@imag.fr

L’induction

Un outil formel élégant très utile en informatique

- elle permet de faire des définitions “récursives”
  - d’ensembles
  - de fonctions
- elle propose une technique de preuve souvent plus élégante que la récursion sur les entiers
  - mais la récursion sur les entiers (ou les ordinaux plus généralement) est toujours possible
- nous l’avons déjà utiliée pour définir les expressions arithmétiques, les expressions régulières,...

Définitions inductives

La définition inductive d'une partie X d'un ensemble consiste

- en la donnée explicite de certains éléments de X (bases),
- en la donnée de moyens de construire de nouveaux éléments de X à partie d'éléments déjà connus (construits), ce sont les étapes inductives

Définitions inductives

Soit U un ensemble. Une *définition inductive* d'une partie X de U est donnée

- d'un sous ensemble B de U,
- d'un ensemble K de fonctions (partielles) $f : U^{a(f)} \to U$, où $a(f)$ est l'artité de f (le nombre d'arguments)

L'ensemble X est défini comme étant **le plus petit** ensemble vérifiant les assertions (B) et (I) suivantes :

- (B) : $B \subseteq X$
- (I) : $\forall f \in K$, $\forall x_1, \cdots, x_{a(f)} \in X$, $f(x_1, \cdots, x_{a(f)}) \in X$.

Définitions inductives

L'ensemble ainsi défini existe. On a $X = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y$, où $\mathcal{Y} = \{Y \subseteq U \mid B \subseteq Y \text{ et } Y \text{ vérifie } (I)\}$.

1. Par définition $\bigcap\limits_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ est plus petit que tout ensemble qui vérifie (B) et (I).
2. On vérifie que $\bigcap\limits_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ vérifie (B) et (I).
   (a) (B) : $\forall Y \in \mathcal{Y}$, $B \subseteq Y$. Donc, $B \subseteq \bigcap\limits_{Y \in \mathcal{Y}} Y$.
   (b) Soient $f \in K$ et $x_1, \cdots, x_{a(f)} \in \bigcap\limits_{Y \in \mathcal{Y}} Y$. Alors, $x_1, \cdots, x_{a(f)} \in Y$, pour tour $Y \in \mathcal{Y}$. Comme $\forall Y \in \mathcal{Y}$, Y vérifie (I), on a $\forall Y \in \mathcal{Y}$, $f(x_1, \cdots, x_{a(f)}) \in Y$. Donc, $f(x_1, \cdots, x_{a(f)}) \in \bigcap\limits_{Y \in \mathcal{Y}} Y$.

Définition explicite

Théorème : Si X est défini inductivement par (B, K) alors

$$X = \bigcup_{i \in I\!N} X_i \text{ où}$$

- $X_0 = B$
- $X_{i+1} = X_i \cup \{f(x_1, \cdots, x_{a(f)}) \mid f \in K,\ x_1, \cdots, x_{a(f)} \in X_i\}$

Démonstration:

1. Pour montrer $\bigcup_{i \in I\!N} X_i \subseteq X$, on montre, par récurrence sur i, $\forall i \in I\!N$, $X_i \subseteq X$.
2. Pour montrer $X \subseteq \bigcup_{i \in I\!N} X_i$, on montre que $\bigcup_{i \in I\!N} X_i$ vérifie (B) et (I).

Principe de preuve par induction

Théorème : Soit X un ensemble défini inductivement par (B, K). Pour montrer

$$\forall x \in X \cdot P(x) \text{ où } P \text{ est une propriété}$$

il suffit de montrer :

1. Cas de base : pour tout $b \in B$, on a $P(b)$.
2. Pâs d'induction : pour tout $f \in K$, pour tout $x_1, \cdots, x_{a(f)} \in U$, si $P(x_1), \cdots, P(x_{a(f)})$ sont vraies, alors $P(f(x_1, \cdots, x_{a(f)}))$ est vraie.

Démonstration: Soit $\mathcal{P} = \{x \in U \mid P(x)\}$. Alors, il suffit de montrer $\mathcal{P}$ vérifie (B) et (I). Ce qui est immédiat.

Preuve par induction

On montre

$$\forall x \in Pair,\ \exists k \in I\!N x = 2k$$

Preuve par induction :

1. Cas de base : $0 = 2 * 0$.
2. Pas d'induction : Soit $x \in Pair$ telq qu'il existe $k_x \in I\!N$ avec $x = 2k_x$. On montre qu'il existe $k \in I\!N$ tel que $x + 2 = 2k$. On pose $k = k_x + 1$.

Retour à l'exemple Pair

On peut aussi montrer

$$\{2k \mid k \in I\!N\} \subseteq Pair$$

On montre : $\forall k \in I\!N \cdot 2k \in Pair$ par recurrence sur k.

- Base : $k = 0$. Alors, $2 * 0 = 0 \in Pair$.
- Pas de recurrence : Soit $k \in I\!N$ tel que $2k \in Pair$. Il faut montrer $2(k+1) \in Pair$.
  On a $2(k+1) = 2k+2 = f(2k)$. Comme $2k \in Pair$, on a $2k+2 = f(2k) \in Pair$.

Définition non-ambiguë

Une défintion inductive est *non-ambiguë*, si

- pour tout $f \in K$ et tout $x_1, \cdots, x_{a(f)} \in X$, $f(x_1, \cdots, x_{a(f)}) \notin B$,
- pour tout $f, f' \in K$ et tout $x_1, \cdots, x_{a(f)}, x'_1, \cdots, x'_{a(f')} \in X$, $f(x_1, \cdots, x_{a(f)}) = f'(x'_1, \cdots, x'_{a(f')})$ implique $f = f'$ et $x + 1 = x'_1, \ldots, x_{a(f)} = x'_{a(f')}$.

Exemples de définitions ambiguëes et non-ambiguëes

Fonctions définies inductivement

Théorème : Soit X un ensemble défini inductivement par (B, K) tel que (B, K) soit non-ambiguë, soit G un ensemble quelconque, soit $g_B : B \to F$ une fonction et une famille de fonctions $g_f : U^{2a(f)} \to G$, pour tout $f \in K$.
Il existe une unique fonction $g : X \to F$ telle que

- pour tout $x \in B$, $g(b) = g_B(b)$
- pour tout $f \in K$ et $x_1 \cdots, x_{a(f)} \in X$

$$g(f(x_1, \cdots, x_{a(f)})) = g_f(x_1, \cdots, x_{a(f)}, g(x_1), \cdots, g(x_{a(f)}))$$