Petit cours d'automatique

- Pourquoi ce cours ?
- Modèle d'un système physique
- Résolution par transformée de Laplace
- Réponse en fréquence, spectre
- Commande par rétro-action
- Commande PID
- Simulation Matlab/Simulink
- Commande par ordinateur
- Transformée en Z
- Simulation Matlab/Simulink

Pourquoi ce cours ?

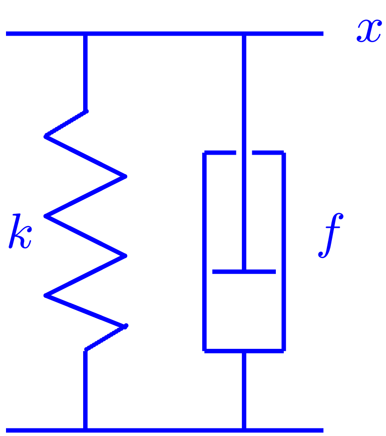
Les systèmes embarqués s'adressent à de nombreux domaines d'application et beaucoup de ces domaines traitent et contrôlent des données issues du monde physique :

1. il est important de savoir comment les spécialistes de ces domaines procèdent pour pouvoir coopérer avec eux ;
2. les ordinateurs interagissant avec les systèmes physiques forment des systèmes complexes qui acquièrent, par cette interaction, de nouvelles propriétés : des changements mineurs du point de vue informatique peuvent avoir des conséquences importantes du point de vue système ;
3. des langages et outils de simulation, d'origine automatique et traitement de signal, deviennent par extension, des outils de programmation dont l'importance croît ; certains sont devenus des standards de fait (avionique, automobile, . . .). Il est important de connaître et comprendre cette

« informatique venue d'ailleurs »

Modèle d'un système physique

Une suspension de voiture



Forces en présence :

- ressort : $-k(x - x_0)$

- amortisseur : $-fx'$

- inertie : mx''

- force externe, pesanteur,...

bilan : équation différentielle

$$mx'' + fx' + kx = u$$

normalisation :

$$x'' + 2zwx' + w^2x = w^2u$$

– w pulsation propre
– z amortissement

Résolution par transformée de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}(x) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

propriétés :

– linéarité :

$$\mathcal{L}(ax + by) = a\mathcal{L}(x) + b\mathcal{L}(y)$$

– transforme les équations différentielles en équations algébriques :

$$\mathcal{L}(x') = s\mathcal{L}(x) - x(0)$$

– transforme les exponentielles en fractions rationnelles :

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}e^{-\lambda t}\right) = \frac{1}{(s+\lambda)^{n+1}}$$

Application

$$x'' + 2zwx' + w^2x = w^2u \quad \Rightarrow \quad s^2X + 2zwsX + w^2X = w^2U$$

$$X = \frac{w^2}{s^2 + 2zws + w^2}U$$

Recherche de solutions :

- trouver les racines du dénominateur (pôles)
- décomposer en éléments simples et inverser la transformée.

Trois cas (réponse impulsionnelle U = 1) :

- $z^2 < 1$: racines complexes conjuguées :
- $z^2 = 1$: racine double
- $z^2 > 1$: racines réelles

– $z^2 < 1$: racines complexes conjuguées :

$$X = \frac{A}{s + zw + iw\sqrt{1-z^2}} + \frac{B}{s + zw - iw\sqrt{1-z^2}}$$

$$A = \frac{w^2}{-2iw\sqrt{1-z^2}} \quad , \quad B = \frac{w^2}{2iw\sqrt{1-z^2}}$$

$$x = \frac{w}{\sqrt{1-z^2}} e^{-zwt} \frac{e^{iw\sqrt{1-z^2}t} - e^{-iw\sqrt{1-z^2}t}}{2i}$$

$$x = \frac{w}{\sqrt{1-z^2}} e^{-zwt} sin(w\sqrt{1-z^2}t)$$

régime oscillant (suspension trop molle) !

– $z^2 = 1$: racine double

$$x = w^2 t e^{-wt}$$

– $z^2 > 1$: racines réelles

$$x = \frac{w}{\sqrt{z^2-1}} (e^{-w(z+\sqrt{z^2-1})t} - e^{-w(z-\sqrt{z^2-1})t})$$

(suspension trop dure) !

Réponse en fréquence, spectre

A la mémoire de Joseph Fourier

$$
\begin{aligned}
u &= e^{-iwt} \\
U &= \frac{1}{s+iw} \\
X &= H\frac{1}{s+iw} \\
X &= AH + B\frac{1}{s+iw} \\
B &= H(-iw)
\end{aligned}
$$

Les exponentielles complexes sont les vecteurs propres des opérateurs ;
$H(-iw)$ est la valeur propre associée au vecteur propre e^{-iwt}.

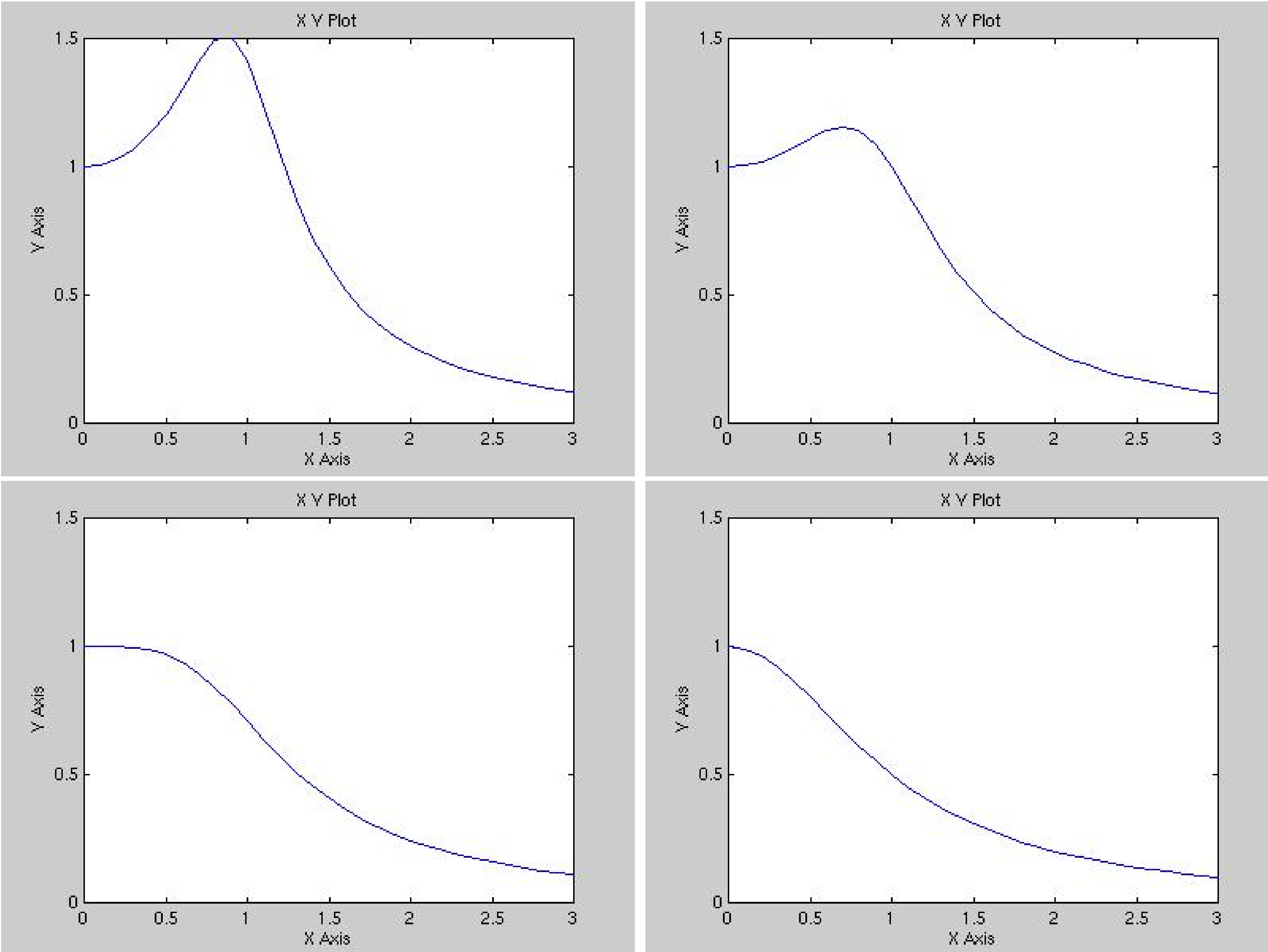
Exemple de la suspension

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{w_0^2}{s^2 + 2zw_0 s + w_0^2} \\
H(-iw) &= \frac{w_0^2}{-w^2 - 2izw_0 w + w_0^2}
\end{aligned}
$$

$H(-iw)$ est une fonction complexe de la fréquence d' excitation w Elle se décompose en amplitude et phase :

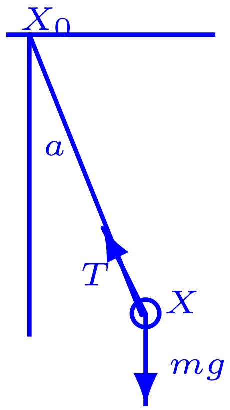
$$
\boxed{
\begin{aligned}
|H(-iw)| &= \frac{w_0^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4z^2 w_0^2 w^2}} \\
ArgH(-iw) &= Arctg \frac{2zw_0 w}{w_0^2 - w^2}
\end{aligned}
}
$$

les pages suivantes décrivent le spectre d'amplitude en fonction de w pour $w_0 = 1$ et des valeurs croissantes de $z^2 = 0.5, 1, 2, 4.$


X Y Plot
Y Axis
X Axis
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
X Y Plot
Y Axis
X Axis
X Y Plot
Y Axis
X Axis
X Y Plot
Y Axis
X Axis

Commande par rétro-action

Le système à commander : grue mono-dimensionnelle, linéarisée



- pesanteur : $m\,\vec{g}$
- tension du cable : $k(\vec{X_0} - \vec{X})$
- inertie : $m\,\vec{X}''$

$$m\,\vec{X}'' = k(\vec{X_0} - \vec{X}) + m\,\vec{g}$$

Projection sur l'axe vertical :

$$\begin{aligned} my'' &= k(y_0 - y) - mg \\ 0 &= kl - mg \\ k &= m\frac{g}{l} \end{aligned}$$

Projection sur l'axe horizontal :

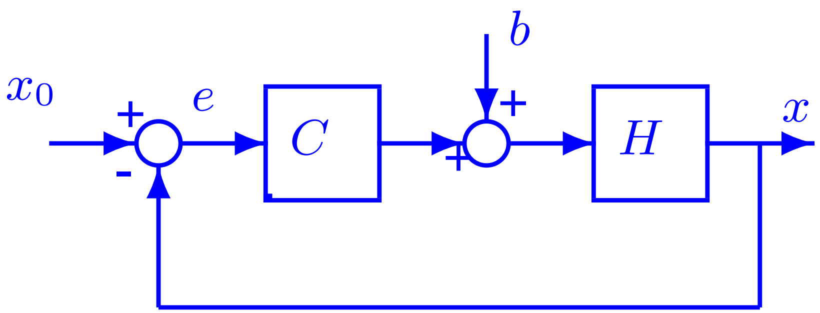
$$\begin{aligned} mx'' &= k(x_0 - x) \\ x'' &= \frac{g}{l}(x_0 - x) \\ X &= \frac{w^2}{s^2 + w^2} X_0 \end{aligned}$$

avec $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pulsation propre du pendule.

aucun amortissement !

Notion de feedback

Commander en fonction de l'écart entre position désirée x_0 et obtenue x :



$$\begin{aligned} e &= x_0 - x \\ x &= H(Ce + b) \\ x &= H(C(x_0 - x) + b) \\ (1 + HC)x &= H(Cx_0 + b) \end{aligned}$$

Calcul formel de ce diagramme !

$$\boxed{x = \frac{HC}{1+HC}x_0 + \frac{H}{1+HC}b}$$

$$\boxed{x = \frac{HC}{1+HC}x_0 + \frac{H}{1+HC}b}$$

Idée de base : C grand

$$\frac{HC}{1+HC} \approx 1 \ , \quad \frac{H}{1+HC} \approx 0 \ , \quad x \approx x_0$$

Mais attention au pompage :

$$\left.\begin{array}{l} H = \frac{w^2}{s^2+2zws+w^2} \\ C = k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{HC}{1+HC} = \frac{w^2 k}{s^2 + 2zws + w^2(1+k)}$$

$$w' = w\sqrt{1+k} \qquad z' = \frac{z}{\sqrt{1+k}}$$

k grand : le système devient de plus en plus oscillant.

Commande PID

Pour réduire les oscillations, ajouter de la dérivée $k's$

Pour rallier le but, ajouter de l'intégrale $\frac{k''}{s}$

$$\boxed{C = k + k's + \frac{k''}{s}}$$

Application à la grue ($w = 1$)

$$\frac{HC}{1+HC} = \frac{k's^2 + ks + k''}{s^3 + k's^2 + (k+1)s + k''}$$

Placement des pôles

Choix des paramètres : identification à un dénominateur

$$\begin{aligned} s^3 + k' s^2 + (k+1)s + k'' &= (s+1)(s^2 + 1.4ws + w^2) \\ s^3 + k' s^2 + (k+1)s + k'' &= s^3 + (1+1.4w)s^2 + (w^2 + 1.4w)s + w^2 \end{aligned}$$

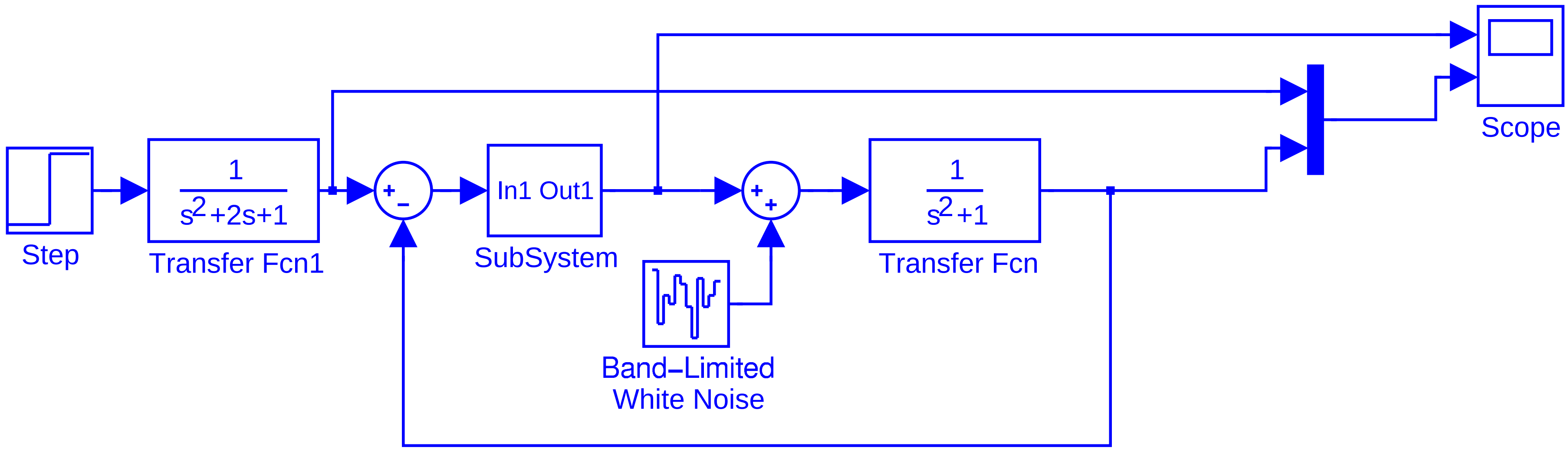
D'où

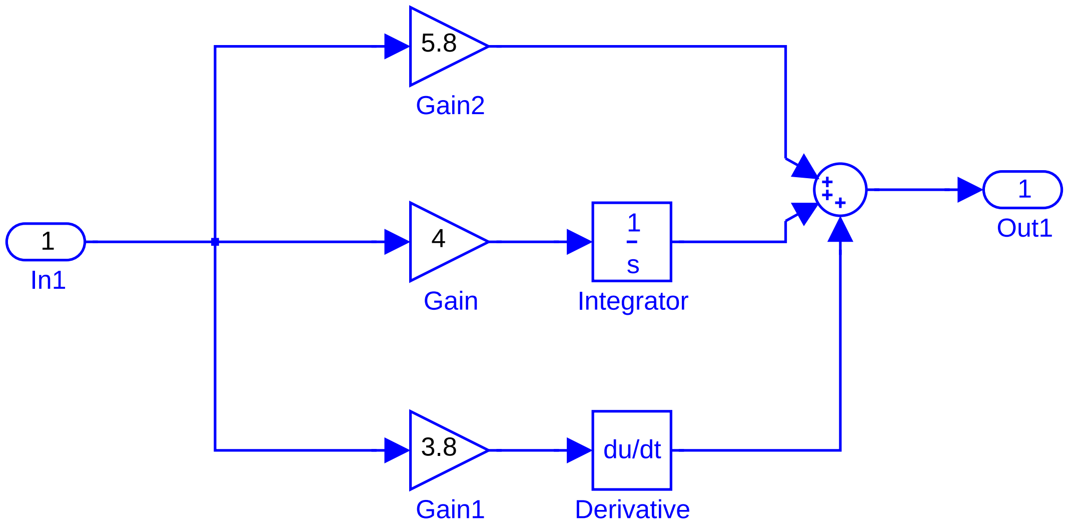
$$k'' = w^2 \ \ , \ \ k = w^2 + 1.4w - 1 \ \ , \ \ k' = 1 + 1.4w$$

Par exemple

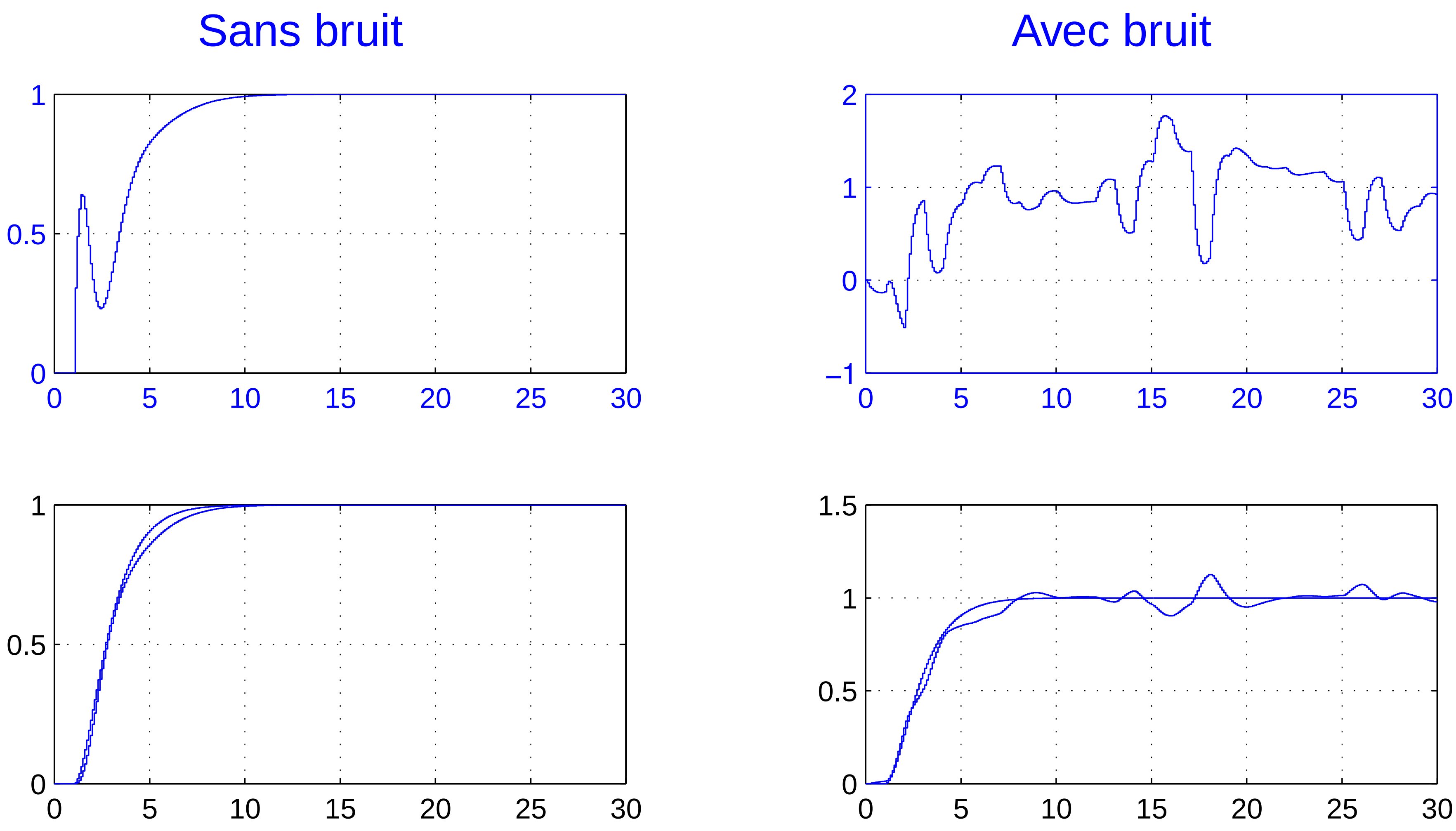
$$k'' = 4 \ \ , \ \ k = 5.8 \ \ , \ \ k' = 3.8$$

Simulation Matlab/Simulink





Résultats



Time offset: 0

Time offset: 0

Commande par ordinateur

Et les ordinateurs dans tout ça ?

idée générale : schémas d'intégration à pas constant

– échantillonnage et fonctionnement périodique

deux techniques :

– construire un contrôleur continu et l'échantillonner ;

– échantillonner le système à contrôler et construire un contrôleur échantillonné (théorie de la commande échantillonnée).

Dans tous les cas, il faut choisir la période.

Commande échantillonnée

Fondée sur le parallèle

	Continu	Echantillonné
Modèle	équations différentielles	équations aux différences
Solutions	exponentielles	puissances
Transformée	$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	$\mathcal{Z}(f) = \sum_0^\infty f(n)z^{-n}$
Intégrale	s^{-1}	$\frac{z}{z-1}$
Retard	e^{-Ts}	z^{-1}

Propriétés de la transformée en z

– linéarité :

$$\mathcal{Z}(ax+by) = a\mathcal{Z}(x) + b\mathcal{Z}\mathcal{L}(y)$$

– transforme les équations aux différences en équations algébriques :

$$\mathcal{Z}(x(n+1)) = z(\mathcal{Z}(x) - x(0))$$

– transforme les puissances en fractions rationnelles :

$$\mathcal{Z}(C_n^k a^{n-k}) = \left(\frac{z}{z-a}\right)^{k+1}$$

Choix de la période

Solution théorique :

> Théorème de Shannon : la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence de coupure.

Solution pratique : analyse numérique

Théorème fondamental de l'analyse numérique

> Théorème des accroissements finis : Pour tout x, t, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que
>
> $$x(t+T) = \sum_{0}^{k} \frac{T^i}{i!} x^{(i)}(t) + \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(t + \alpha T)$$

Exemple : schéma d'Euler

$$x(t+T) \approx x(t) + Tx'(t)$$

car

$$|x(t+T) - (x(t) + Tx'(t))| \leq \frac{T^2}{2} sup_t |x''(t)|$$

Application : exponentielle

$$x(t) = e^{-at} \qquad x''(t) = a^2 e^{-at} \leq a^2$$

$$\frac{T^2 a^2}{2} \leq 0.01 \Rightarrow T \leq \frac{0.14}{a}$$

En pratique on prend

$$T = \frac{0.1}{a}$$

.

Z, Laplace,...

$\frac{1}{z}$ est l'opérateur retard unité

Si on choisit un pas d'échantillonnage T on peut donc écrire :

$$\frac{1}{z} = e^{-sT}$$

On a alors l'approximation du premier ordre (développement limité)

$$e^{-sT} \approx 1 - sT$$

Donc, au premier ordre,

$$\begin{aligned} 1 - sT &\approx \frac{1}{z} \\ sT &\approx 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \\ s &\approx \frac{z-1}{zT} \end{aligned}$$

Z, Laplace et Euler

$$\boxed{s \approx \frac{z-1}{zT}}$$

Et Euler ?

Appliquons à une fonction de transfert H :

$$H(s) \approx H(\frac{z-1}{zT})$$

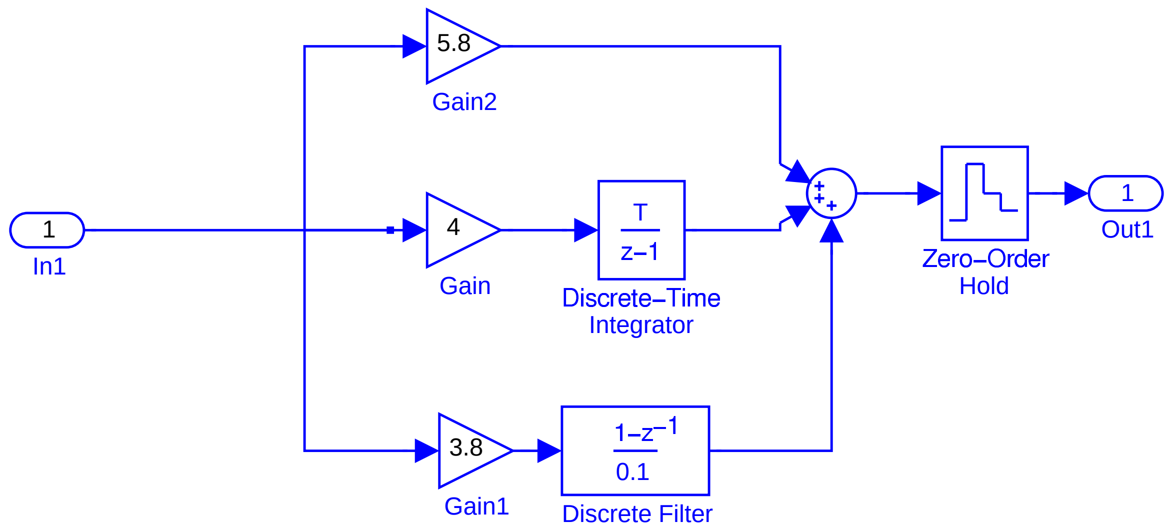
On est passé d'un système continu à un système échantillonné, implantable sur calculateur

Cela correspond à la méthode d'Euler :

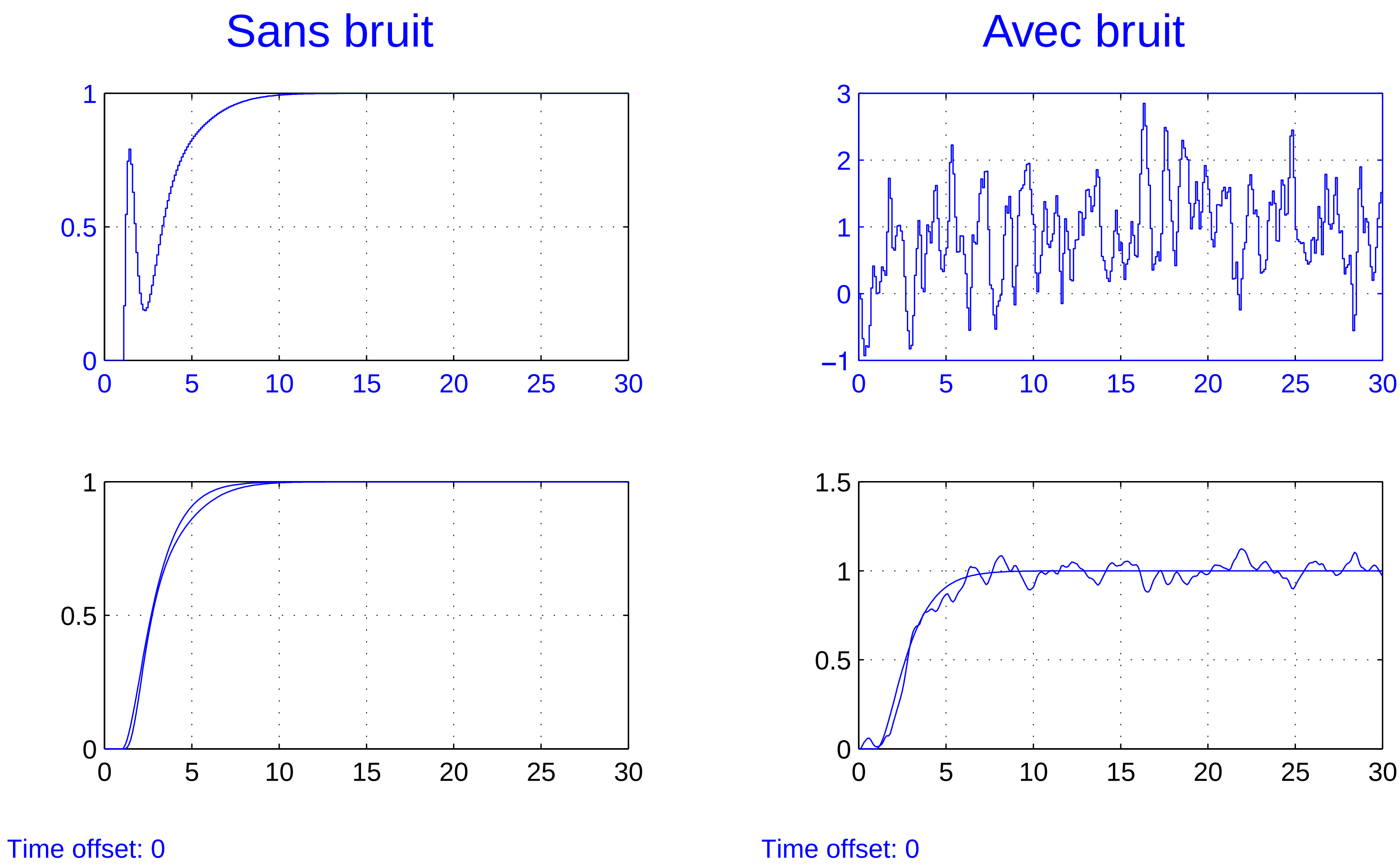
$$sx(s) \approx \frac{z-1}{zT}x(z)$$

$$x'(t) \approx \frac{x(n) - x(n-1)}{T}$$

Simulation Matlab/Simulink

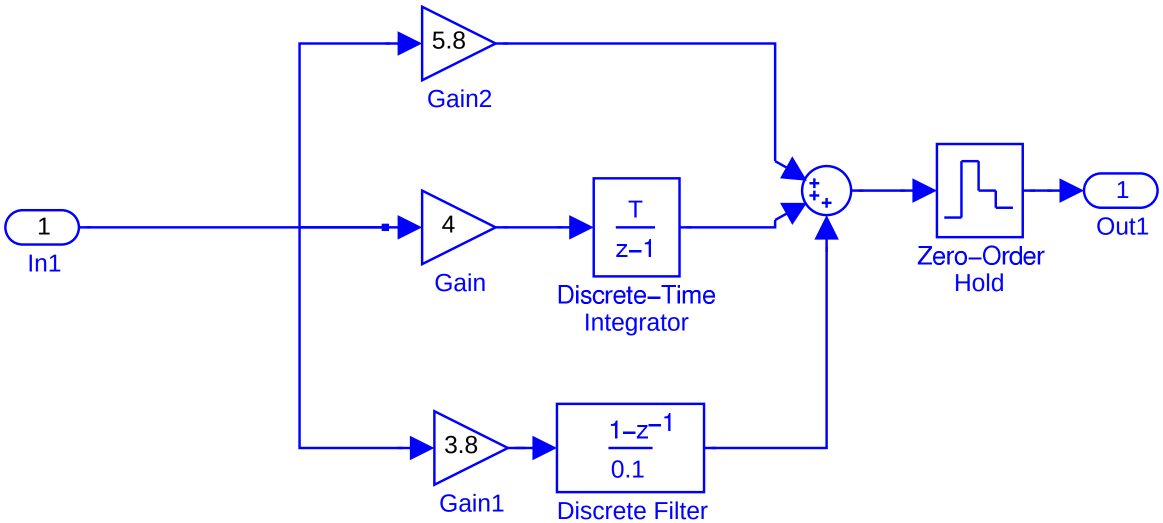


Résultats



comparables à ceux obtenus en continu

Z et Lustre



Le même en Lustre :

```
y  = 5.8*x + 4.0*yi + 3.8*yd ;
yi = T*x + (0.0 -> pre yi) ;
yd = (x - (0.0 -> pre x))/T ;
```

De Z à Lustre

En transformée en Z

$$Y_i = \frac{Tz}{z-1} X$$

D'où

$$\begin{aligned} (z-1)Y_i &= TzX \\ zY_i &= TzX - Y_i \\ Y_i &= TX - \frac{1}{z} Y_i \end{aligned}$$

Le même en Lustre :

```
yi = T*x + (0.0 -> pre yi) ;
```

Conclusion

On note la parenté (filiation) entre Lustre et les méthodes de l'automatique :

Tous deux réfléchissent en termes de réseaux d'opérateurs agissant globalement sur des signaux.

L'automatique linéaire a un calcul symbolique plus riche (fractions rationnelles) mais limité au linéaire.

Lustre a aussi un calcul symbolique bien que plus restreint (commutation des `pre`)

Cela explique sans doute la bonne acceptation de Lustre dans le monde de l'automatique.